2. Евклидово векторно пространство

Задача 1 Нека $ABCD$ е успоредник. Ако е известно, че $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, като $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ и $|\overrightarrow{BD}| = 7$, да се намерят $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ и $|\overrightarrow{AC}|$.

Задача 2 Като се използва скаларно произведение, да се докаже твърдението: "Сумата от квадратите на диагоналите на трапец е равна на сумата от квадратите на неуспоредните му страни, увеличена с произведението на основите му".

Задача 3 Спрямо ортонормирана координатна система върховете на $\triangle ABC$ са съответно с радиус-вектори: $\overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_3$, $\overrightarrow{r}_B = 4\overrightarrow{e}_1 + \sqrt{7}\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{r}_C = \overrightarrow{e}_1$.

а) Докажете, че ABC е правоъгълен триъгълник.

б) Ако H е петата на височината, спусната от върха C към хипотенузата AB, да се изрази $\overrightarrow{CH}$ като линейна комбинация на $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Задача 4 Да се докаже, че $\mathbb{R}_2[x]$, снабдено с операцията

$$(p, q) \to pq = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + 2a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 5a_2b_2,$$

където $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$, е евклидово пространство. Да се пресметне ъгъла между $p = 1 - x^2$ и $q = x + x^2$.