3. Детерминанти. Линейни преобразувания и техните матрици. Обратна матрица

Задача 1 Да се пресметнат детерминантите на следните матрици и да се намерят обратните им матрици, ако съществуват:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2 Нека f е преобразувание на $\mathbb{R}_3[x]$, определено чрез

$$f\big(p(x)\big) = p(x+1) - p(x), \quad p(x) \in \mathbb{R}_3[x].$$

а) Да се докаже, че f е линейно.

б) Да се напише матрицата на f относно каноничната база на $\mathbb{R}_3[x]$.

в) Да се намери аналитичното представяне на f.

г) Да се намери $f\big(q(x)\big)$ за $q(x) = -3 + 2x + 5x^2 - 7x^3$.

д) Да се намерят рангът и дефектът на f, като се посочи по една база на $\ker f$ и $\operatorname{im} f$.

Задача 3 Нека $ABCD$ е успоредник, като O е пресечната точка на диагоналите му, $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{OC}$.

а) Да се намери матрицата T на прехода от базата $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ към базата $e' = (\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2)$.

б) Ако $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, да се намерят координатите му относно базата e'.

в) Да се намери $M_{e'}(f)$, ако $M_e(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.