

Помагало по алгебра

Автори:

Й. Епитропов и И. Градева

Съдържание:

УВОДНИ ДУМИ	3
1. Алгебрична форма на комплексните числа	4
2. Тригонометрична форма на комплексните числа	5
3. Корени на единицата	7
4. Деление на полиноми	8
5. Най-голям общ делител на полиноми. Алгоритъм на Евклид	9
6. Корени на полиномите. Таблица на Хорнер. Многократни корени	10
7. Теорема на Даламбер и следствия от нея.....	11
8. Полиноми с реални коефициенти. Рационални корени на полиноми с цели коефициенти. Разлагане на полиномите на неразложими множители.....	12
9. Уравнения от трета и четвърта степен	13

УВОДНИ ДУМИ

На всяко нещо може да се гледа от много страни... За някои студенти “Алгебра” е онзи предмет от втори курс, по който изпитът се взема в четвърти. За други “Алгебра” е тази възможност за разработване на ефективни и ефектни алгоритми, която може да осигури защитата на определена информация и да направи възможно надеждното ѝ предаване дори между ненадеждни човеци. А за трети “Алгебра” е онази част от математиката, която изучава абстрактните структури. Ние приемаме и трите възгледа, а и не само тях...

Това електронно Помагало се основава на двата ни Сборника¹ и съдържа по-голямата част от типовете задачи, които решаваме със студентите от различните специалности на Факултета по математика и информатика при обучението им по предметите Алгебра, Алгебра 1 и Алгебрични структури. Последователността и структурата на отделните теми съответстват на семинарните занятия. Дали сме коментар и отговор на всяка задача. Необходимата теория за решаването на задачите от Помагалото може да се потърси (а и да се намери!) в учебниците, препоръчани от съответните лектори.

С оглед на пълнотата в подготовката на студентите материалът в отделните теми включва задачи от елементарно до необходимо и достатъчно високо ниво. Естествено, подборът и подредбата на задачите отразява нашите предпочитания, вкусове и дори пристрастия по темите. Предлаганите задачи не са изчислително най-трудните, нито пък идейно най-сложните. Но те като съвкупност могат да дадат на студента необходимите знания за достатъчното разбиране на предмета. А човек не трябва да ражда отрицание дори като мисъл, още повече пък да употребява психична сила с отрицателни намерения...

При написването на това Помагало се уповавахме на интуицията, която просветлява и облагородява мисълта. Затова то може (а и трябва!) да се използва не само като част от аудиторната работа, и за самообучение.

Ако успеем да събудим нечий интерес или тревога, то идеите ни са дали плод...!

Авторите

¹ Й. Епитропов и И. Градева, Задачи по алгебра, 2009;
Й. Епитропов и И. Градева, Сборник по алгебра, 2011.

1. Алгебрична форма на комплексните числа

1. Да се намерят реалните числа x и y , ако е известно, че $(2+i)x + (2-3i)y = 2-7i$.

Коментар: Използвайте правилото за сравняване на комплексни числа.

Отговор: $x = -1$, $y = 2$.

2. Да се докаже, че ако a , b , c , d и n са реални числа и $a+bi = (c+di)^n$, то $a^2+b^2 = (c^2+d^2)^n$.

Коментар: Умножете по комплексно спрегнатия израз.

3. Да се пресметне израз $\frac{5i-6}{3-2i} + \frac{i^{17}}{3+2i}$.

Коментар: Припомнете си как се степенува имагинерната единица, след това приведете към общ знаменател.

Отговор: $-2 + \frac{6}{13}i$.

4. Ако z_1 и z_2 са комплексни числа, то да се реши системата линейни уравнения

$$\begin{cases} (1+2i)z_1 + (2+i)z_2 = 6i-2 \\ (3-i)z_1 - (1+3i)z_2 = 6-2i \end{cases}$$

Коментар: Може би най-елегантният вариант е да приложите формулите на Крамер.

Отговор: $z_1 = i$, $z_2 = 1+2i$.

5. Ако n е цяло число, то да се пресметне израз $\frac{(1-i)^{8n+1}}{1+i} + \frac{(1+i)^{8n+1}}{1-i}$.

Коментар: Стандартът е отначало числителите да се повдигнат на втора степен, а след това всеки да се оправи както може.

Забелязахте ли, че първата дроб е комплексно спрегната на втората? Как може да се използва това?

Отговор: 0.

6. Да се намерят всички стойности на $\sqrt{5-12i}$.

Коментар: Ако предположите, че $\sqrt{5-12i} = x+yi$, където $x, y \in \mathbb{R}$, то повдигнете равенството на втора степен. Следвайки алгоритъма на задача 1, минете през нелинейна система, биквадратно уравнение и ще се доберете до отговора.

Отговор: $\pm(3-2i)$.

7. Да се решат уравненията: а) $z^2 - 2z + 5 = 0$; б) $(1-i)z^2 + (-3-i)z + 2i = 0$.

Коментар: Нужно е само да приложите формулата за квадратно уравнение и да сте наясно с вече упражнените операции с комплексни числа.

Отговори: а) $z_{1,2} = 1 \pm 2i$; б) $z_1 = i$, $z_2 = 1+i$.

2. Тригонометрична форма на комплексните числа

1. Да се представят в тригонометрична форма комплексните числа а) 1; б) $-\sqrt{2}$; в) i ; г) $-3i$; д) $1+i$; е) $-1+i$; ж) $-1-i$; з) $1+i\sqrt{3}$; и) $1-i\sqrt{3}$; й) $-1+i\sqrt{3}$; к) $3-i\sqrt{3}$.

Коментар: Направете картинка на числото в съответния квадрант. Модулът му се явява хипотенуза в подходящо избран правоъгълен триъгълник. За намиране на аргумента използвайте елементарните зависимости между катет и хипотенуза.

Отговор: а) $1 = \cos 0 + i \sin 0$; б) $-\sqrt{2} = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$; в) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$;

г) $-3i = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$; д) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$;

ж) $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$; з) $1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$; и) $1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$;

й) $-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$; к) $3-i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$.

2. Да се представят в тригонометрична форма комплексните числа а) $\cos \alpha - i \sin \alpha$; б) $-\cos \alpha - i \sin \alpha$; в) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$; г) $\sin \alpha - i \cos \alpha$; д) $-\sin \alpha + i \cos \alpha$; е) $\sin \alpha + i \cos \alpha$; ж) $-\sin \alpha - i \cos \alpha$.

Коментар: Сигурни ли сте, че числата не са вече в тригонометрична форма...?!

а) Помнете ли що е комплексно спрегнатото? б) Изнесете -1 и го представете в тригонометрична форма, след това приложете формулата за умножение на комплексни числа в тригонометрична форма. в) Първо като б), след това като а) и това е всичко. г) Умножете и разделете на i , след това го представете в тригонометрична форма и отново умножете и разделете в тригонометрична форма. д-ж) Вече имате всичко необходимо (консултации по съобразителност не даваме).

Отговори: а) $\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$; б) $\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)$; в) $\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$;

г) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; д) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

ж) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

3. Да се изобрази в комплексната равнина множеството от всички комплексни числа z ,

удовлетворяващи условието: а) $|z| = 1$; б) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; в) $|z| < 2$; г) $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$; д) $|z - i| = 1$;

е) $\begin{cases} |z - 1 - i| \leq 1 \\ 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Коментар: Всички комплексни числа с равни модули лежат на една окръжност (с какъв център и какъв радиус?), а всички комплексни числа с равни аргументи лежат на един лъч (с какво начало и какъв ъгъл сключва с положителната част на реалната ос?).

Отговори: а) окръжност с център $(0;0)$ и радиус 1; б) лъч с начало $(0;0)$, сключващ с

положителната част на реалната ос ъгъл $\frac{\pi}{6}$; в) вътрешността на кръг с център $(0;0)$ и радиус

2; г) сектор между лъчите с начало $(0;0)$, сключващи с положителната част на реалната ос

ъгли $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$; д) окръжност с център $(0;1)$ и радиус 1; е) сечението на кръга с център $(1;1)$ и радиус 1 и сектора между лъчите с начало $(0;0)$, съдържащи с положителната част на реалната ос ъгли 0 и $\frac{\pi}{4}$.

4. Да се реши уравнението $|z| + (1+i)z = 4 + 7i$.

Коментар: Запишете z в алгебричен вид и използвайте задача 1.1. Не забравяйте, че модулът е реално число!

Отговор: $3 + 4i$.

5. Да се намери алгебричната форма на комплексното число

$$\frac{\left(\cos \frac{13\pi}{5} + i \sin \frac{13\pi}{5}\right) \left(\sin \frac{7\pi}{10} - i \cos \frac{7\pi}{10}\right)}{\cos \frac{3\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5}}.$$

Коментар: Първо – всичко в тригонометрична форма (вижте отново задача 2!). След това умножете и разделете.

Отговор: $-i$.

6. Да се намерят всички стойности на $\sqrt[3]{2+2i}$.

Коментар: Същото като при задача 5. Обърнете внимание на вълшебната дума „всички”!

Отговор: $\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 8k\pi}{12} + i \sin \frac{\pi + 8k\pi}{12} \right), k = 0, 1, 2.$

3. Корени на единицата

1. Да се намерят примитивните корени на единицата от степен 12.

Коментар: Използвайте директно теоретичната формула.

Отговор: $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$, $\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$.

2. Какъв показател има коренът на единицата $z = \cos \frac{2.137\pi}{180} + i \sin \frac{2.137\pi}{180}$?

Коментар: Отново използвайте директно теоретичната формула.

Отговор: 180.

3. Да се намерят всички 28-ми корени на единицата, които имат показател 14.

Коментар: Обратен вариант на задача 2. Първо трябва да запишете общия вид на 28-мите корени на единицата, след това вече можете...

Отговор: $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$.

4. Да се намери показателят на всеки корен на единицата от степен 24.

Коментар: Търпеливо изчислете всички възможни стойности като в задача 2.

Отговор: Ако $z_k = \cos \frac{2k\pi}{24} + i \sin \frac{2k\pi}{24}$, то показател 1 има z_0 , показател 2 има z_{12} , показател 3 имат z_8 и z_{16} , показател 4 имат z_6 и z_{18} , показател 6 имат z_4 и z_{20} , показател 8 имат z_3 , z_9 , z_{15} и z_{21} , показател 12 имат z_2 , z_{10} , z_{14} и z_{22} , а показател 24 имат z_1 , z_6 , z_7 , z_{11} , z_{13} , z_{17} , z_{19} и z_{23} .

5. Да се пресметне сумата на n -те корени на единицата при $n \geq 2$.

Коментар: Изберете един примитивен корен на единицата при фиксирано $n \geq 2$ и представете всеки n -ти корен на единицата като степен на примитивния.

Отговор: 0.

6. Да се пресметне сумата $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}$, където ε е примитивен $2n$ -ти корен на единицата.

Коментар: Убедете се, че ако ε е примитивен $2n$ -ти корен на единицата, то $\varepsilon^n = -1$. След това действайте като в задача 5.

Отговор: $\frac{2}{1 - \varepsilon}$.

4. Деление на полиноми

1. Да се намери сумата от коефициентите на полинома

$$f(x) = (-x^3 + 5x + 2)^{211} (5x^3 - 9x^2 + 7x - 3)^{135}.$$

Коментар: Търсената сума всъщност е равна на $f(1)$.

Отговор: 0.

2. Да се намери сумата от коефициентите пред четните степени на полинома

$$f(x) = (4x^5 + (2-i)x^4 - 5ix^3 + (-4+4i)x - 2+i)^n.$$

Коментар: Тази сума е равна на $\frac{f(1)+f(-1)}{2}$, но защо...?

За любознателните: колко е сумата от коефициентите пред нечетните степени на $f(x)$?

Отговор: 0 при n нечетно, 1 при $n = 4k$, -1 при $n = 4k + 2$.

3. Да се раздели полиномът $f(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 2x - 7$ на полинома $g(x) = x^2 + x - 1$.

Коментар: Приложете непоколебимо алгоритъма за деление.

Отговор: $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $r(x) = 2x - 8$.

4. Да се определи при какви стойности на коефициентите a , b и c полиномът

$$f(x) = x^4 + ax^3 + b$$
 се дели на полинома $g(x) = x^2 + cx + 1$.

Коментар: Разделете по стандартния начин $f(x)$ на $g(x)$ с частно и остатък. По определение $g(x)$ дели $f(x)$ точно тогава, когато остатъкът $r(x)$ от делението е тъждествено равен на нула. Последното означава на практика, че всеки от коефициентите на $r(x)$ трябва да се приравни на 0.

Отговор: $a = (b+1)c$.

5. Да се намери остатъкът от делението на полинома $f(x) = x^{1000} - x^{999} + x$ с полинома $g(x) = x^2 - 4$.

Коментар: Степента на остатъка не надминава 1, т.е. той има вида $r(x) = ax + b$. Заместете остатъка в равенството $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и дайте на x последователно стойности 2 и -2. Решете получената система относно a и b .

Отново за любознателните: а защо избираме точно $x = 2$ и $x = -2$?

Отговор: $(1 - 2^{998})x + 2^{1000}$.

6. При делението на полинома $f(x)$ с полиномите $g_1(x) = x - 3$ и $g_2(x) = x + 1$ се получават остатъци, съответно, $r_1(x) = 7$ и $r_2(x) = 3$. Да се намери остатъкът от делението на полинома $f(x)$ с полинома $g(x) = g_1(x)g_2(x)$.

Коментар: Усложнен вариант на задача 6, тъй като не знаем дори колко е $f(x)$. Започнете по същия начин като изразите делението на $f(x)$ с $g_1(x)$ и с $g_2(x)$. Необходимите числени стойности за сметките са $x = 3$ и $x = -1$ (защо?). Липсата на конкретното $f(x)$ се компенсира (как?) от стойностите на $r_1(x)$ и $r_2(x)$.

Отговор: $x + 4$.

5. Най-голям общ делител на полиноми. Алгоритъм на Евклид

1. Да се намери най-големият общ делител $d(x)$ на полиномите $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 2x + 1)$ и $g(x) = (x^2 - 1)^3$.

Коментар: Използвайте алгоритъма за намиране на НОД на естествени числа, представени в каноничен вид (учи се в V клас). Достатъчно е да разложите полиномите на „прости“ множители.

Отговор: $(x - 1)^3$.

2. Да се намери най-големият общ делител $d(x)$ на полинома $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2(x - 3)$ и първата му производна.

Коментар: Може като в задача 1. Може и така: корените на $f(x)$ са корени и на $f'(x)$, но с 1 по-ниска кратност.

Отговор: $(x - 1)^2(x + 1)$.

3. Да се намери най-големият общ делител $d(x)$ на полиномите $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2$ и $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Коментар: Следвайте точно алгоритъма на Евклид.

Отговор: $x^2 + x + 1$.

4. С метода на неопределените коефициенти за взаимно простите полиноми $f(x) = x^3$ и $g(x) = (x - 1)^2$ да се намерят такива полиноми $u(x)$ от степен 2 и $v(x)$ от степен 3, че да е изпълнено $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$.

Коментар: Тук не е важна сметката, а идеята зад нея.

Отговор: $u(x) = \frac{-16x^2 + 37x + 26}{3}$, $v(x) = \frac{16x^3 - 53x^2 - 37x - 23}{3}$.

5. Като се използва алгоритъмът на Евклид, за полиномите $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1$ и $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ да се намерят такива полиноми $u(x)$ и $v(x)$, че да е изпълнено $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$.

Коментар: Първо намерете най-големият общ делител $d(x)$. След това използвайте последователно стъпките от алгоритъма на Евклид, за да изразите $d(x)$ чрез $f(x)$ и $g(x)$.

Отговор: $u(x) = x^2 - x + 1$, $v(x) = -x^2$.

6. Нека $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, където $d(x)$ е най-големият общ делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$. Кой е най-големият общ делител на полиномите $u(x)$ и $v(x)$?

Коментар: Полезно теоретично разсъждение върху смисъла на алгоритъма на Евклид.

Отговор: 1.

6. Корени на полиномите. Таблица на Хорнер. Многократни корени

1. Чрез схемата на Хорнер да се пресметне $f(-2-i)$, ако

$$f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7.$$

Коментар: Първо обърнете внимание дали сте попълнили нулевите коефициенти на $f(x)$ в схемата. Извод след сметките: числото под свободния член на $f(x)$ е търсената стойност.

Отговор: $-1-44i$.

2. Чрез схемата на Хорнер да се раздели полиномът $f(x) = 4x^3 + x^2$ на полинома $g(x) = x+1+i$.

Коментар: Обърнете внимание дали изчислявате схемата с $-1-i$. Изводи след сметките: числото под свободния член на $f(x)$ е остатъкът от делението, а числата пред него са съответните коефициенти (пред променливата) на частното.

Отговор: $q(x) = 4x^2 - (3+4i)x - 1 + 7i$, $r(x) = 8 - 6i$.

3. Чрез схемата на Хорнер да се разложи полиномът $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$ по степените на полинома $x+i$.

Коментар: Изчислете схемата с $-i$. Отделете последното число и използвайте тези пред него, за да изчислите още веднъж по Хорнер с $-i$. Повтаряйте, докато в новата схема остане само едно число. Вземете в обратен ред отделените числа – това са търсените коефициенти.

Отговор: $(x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + 7 + 5i$.

4. Използвайки схемата на Хорнер, да се разложи дробта $\frac{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90}{(x-2)^5}$ на

сума от възможно най-прости дроби.

Коментар: Както в задача 3 разложете числителя по степените на $x-2$ (това елегантно действие ни беше подсказано от знаменателя).

Към любознателните: тази умопомрачителна операция може да помогне при изчисляване на интеграли от рационални функции.

Отговор: $\frac{1}{x-2} - \frac{18}{(x-2)^4} + \frac{38}{(x-2)^5}$.

5. Да се определи при какви стойности на коефициентите a и b полиномът

$$f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$$
 се дели на полинома $g(x) = (x-1)^2$.

Коментар: Използвайте следното елементарно свойство: полиномът $f(x)$ се дели на полинома $g(x)$ точно тогава, когато всеки корен на $g(x)$ е корен и на $f(x)$ (с отчитане и на кратността му). Значи, достатъчно е да намерите при какви стойности на коефициентите a и b числото 1 е двукратен корен на $f(x)$. Последното е еквивалентно на решаването на системата $f(1) = f'(1) = 0$.

Отговор: $a = n$, $b = -n-1$.

6. Полиномът $f(x) = x^4 - 2ax^3 + 12x^2 + bx + 9$ има два двукратни корена. Да се определят коефициентите a и b .

Коментар: Представете полинома във вида $f(x) = (x-m)^2(x-n)^2$ и използвайте метода на неопределените коефициенти.

Отговор: $a_1 = -3\sqrt{2}$, $b_1 = -18\sqrt{2}$; $a_2 = -\sqrt{6}$, $b_2 = 6\sqrt{6}$; $a_3 = \sqrt{6}$, $b_3 = -6\sqrt{6}$; $a_4 = 3\sqrt{2}$, $b_4 = 18\sqrt{2}$.

7. Теорема на Даламбер и следствия от нея

1. Сумата на два от корените на полинома $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x + a$ е равна на произведението им. Да се определи коефициентът a .

Коментар: Запишете формулите на Виет за дадения полином. Като използвате зависимостта $x_1 + x_2 = x_1 x_2$ преработете системата. Ако изразите $x_1 x_2$ от първото уравнение и го заместите във второто, ще получите квадратно уравнение относно x_3 . С намерените стойности на x_3 изчислете съответните стойности на $x_1 x_2$ и определете a .

Отговор: $a_1 = -3$, $a_2 = 4$.

2. Сумата на два от корените на полинома $f(x) = x^3 - 5x + a$ е равна на удвоеното им произведение. Да се определи коефициентът a .

Коментар: Приложете същата схема на изчисления като в задача 1.

Отговор: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{25}{8}$.

3. При какви условия за коефициентите на уравнението $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ единият му корен е равен на сумата от другите два корена?

Коментар: Запишете формулите на Виет за полинома от уравнението. Като използвате зависимостта $x_1 + x_2 = x_3$ преработете системата. От първото уравнение намерете x_3 , а чрез него от второто уравнение и $x_1 x_2$. Накрая заместете в третото уравнение.

Отговор: единият корен е $-\frac{a}{2}$, а условието е $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

4. Да се провери, че единият от корените на полинома $f(x) = 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ е равен на сумата от другите два и да се реши уравнението $f(x) = 0$.

Коментар: За проверката използвайте условието, получено в задача 3. Оттам имате и стойността на единия корен. Повикайте на помощ колегата Хорнер и остава да решите само едно квадратно уравнение.

Отговор: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

5. Сумата на два от корените на полинома $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + ax - 2$ е 2. Да се намери коефициентът a .

Коментар: Запишете формулите на Виет за конкретния полином. От първото уравнение последователно намирате $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$. Преработете второто и третото уравнение и сравнете стойностите на $x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Отговор: $a = 6$.

6. Сумата на два от корените на полинома $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + ax - 2$ е 3. Да се намери коефициентът a .

Коментар: Започнете като в задача 5. Ще се наложи да използвате и четвъртото уравнение от формулите на Виет, за да съставите квадратно уравнение относно a .

Отговор: $a_1 = -3$, $a_2 = 6$.

8. Полиноми с реални коефициенти. Рационални корени на полиноми с цели коефициенти. Разлагане на полиномите на неразложими множители

1. Да се построи полином от най-ниска степен, ако корените му са: двоен корен i , прост корен $-1-i$.

Коментар: Мислете си за Безу или Даламбер...

Отговор: $(x-i)^2(x+1+i)$.

2. Да се построи полином от най-ниска степен с реални коефициенти, ако корените му са: двоен корен i , прост корен $-1-i$.

Коментар: Когато един полином с реални коефициенти има за корен комплексно число, то и неговото комплексно спрегнато също е корен на полинома, и то със същата кратност.

Отговор: $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)$.

3. Да се разложи полиномът $f(x) = x^3 + x - 2$ на неразложими множители над полето R на реалните числа.

Коментар: Неразложими над R са полиномите от първа степен и онези от втора степен, които са с отрицателна дискриминанта.

Отговор: $(x-1)(x^2+x+2)$.

4. Да се намерят рационалните корени на полинома

$f(x) = 24x^6 + 20x^5 - 18x^4 + 23x^3 + 15x^2 - 13x - 6$ и да се определят техните кратности.

Коментар: Логично е първо да потърсите цели корени – ако има такива, те са измежду делителите на свободния член. На втори ход търсете дробни корени – ако има такива, техните числители са измежду делителите на старшия член, а знаменателите им са измежду делителите на свободния член. Останалото е Хорнер, търпение и точни сметки...

Отговор: $x = -\frac{3}{2}$ и $x = \frac{2}{3}$ са прости корени, а $x = -\frac{1}{2}$ е двукратен корен.

5. Да се докаже, че полиномът $x^4 - 3x^2 + 2x + 3$ е неразложим над полето Q на рационалните числа.

Коментар: Убедете се, че полиномът няма рационални корени (като в задача 4). След това покажете, че над Q той не може да се представи като произведение на два квадратни тричлена (например с метода на неопределените коефициенти). Това е достатъчно.

6. Да се провери чрез критерия на Айзенщайн-Шонеман, че полиномът $f(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ е неразложим над полето Q на рационалните числа.

Коментар: Тънкостта в прилагането на критерия е да откриете подходящо просто число. Важно: ако не откриете такова число, не може да направите никакъв извод за полинома.

Отговор: $p = 2$.

7. Да се разложи полиномът $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ на неразложими множители над полетата Q , R и C .

Коментар: Всичко важно вече го казахме.

За любознателните: който не може да разлага полиноми на неразложими множители над полетата Q , R и C , не може да си вземе изпита... (blush)

Отговор: над Q : $(x-2)(x+1)(x^2+1)$; над R : $(x-2)(x+1)(x^2+1)$; над C : $(x-2)(x+1)(x-i)(x+i)$.

9. Уравнения от трета и четвърта степен

1. Да се реши уравнението $x^3 + 6x + 2 = 0$ от трета степен.

Коментар: Използвайте метода на Кардано. Все пак, проверете първоначално дали няма рационални корени :D

Отговор: $x_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, $x_{2,3} = \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{2} i$.

2. Да се реши уравнението $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$ от трета степен.

Коментар: С подходяща субституция отстранете члена от втора степен.

Отговор: $x_1 = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $x_{2,3} = \frac{2 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{2} i$.

3. Да се реши уравнението $x^4 - 7x^2 + 12x - 3 = 0$ от четвърта степен.

Коментар: Ние сме фенове на метода на Декарт (нямаме предвид „Мисля, следователно съществувам“).

Отговор: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

4. Да се реши уравнението $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 16x - 11 = 0$ от четвърта степен.

Коментар: С подходяща субституция отстранете члена от трета степен.

Отговор: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = 3 \pm i\sqrt{2}$.

5. Да се докаже, че ако сумата на два от корените на уравнението

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) е равно на сумата на другите му два корена, уравнението се свежда към биквадратно със субституцията $x = y + z$ при подходящ избор на z .

Коментар: Покажете, че за полином от този тип е изпълнено условието $a^3 + 8c = 4ab$.

Положете $x = y - \frac{a}{4}$ и се уверете, че поради изведеното условие коефициентите пред y^3 и y са равни на 0.