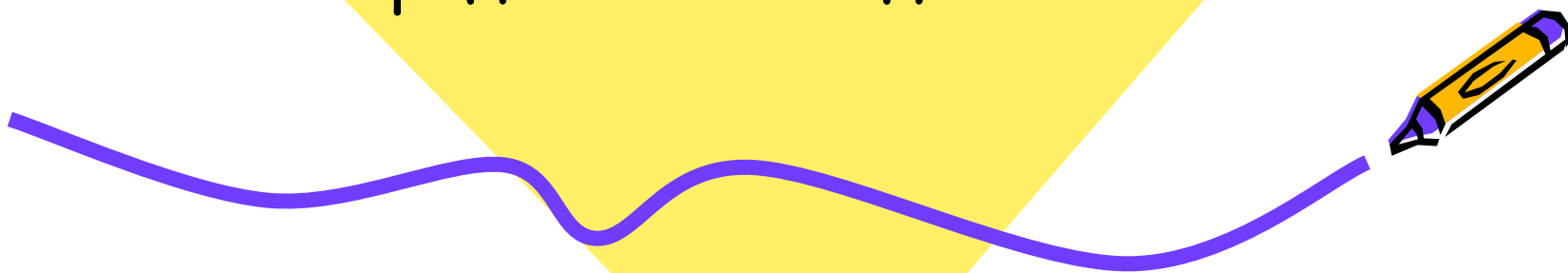




Компютърни архитектури - упражнения

Представяне на данните





Представяне на данните

Методи за представяне на абстрактното понятие
количество

- Всяко определено количество се означава с **число**
- Числото е производно понятие от правилата на една определена система, наречена **бройна система**

Бройната система е една от най-старите абстракции на човешкия род



Бройни системи

Всяка бройна система се изгражда от **две съвкупности**:

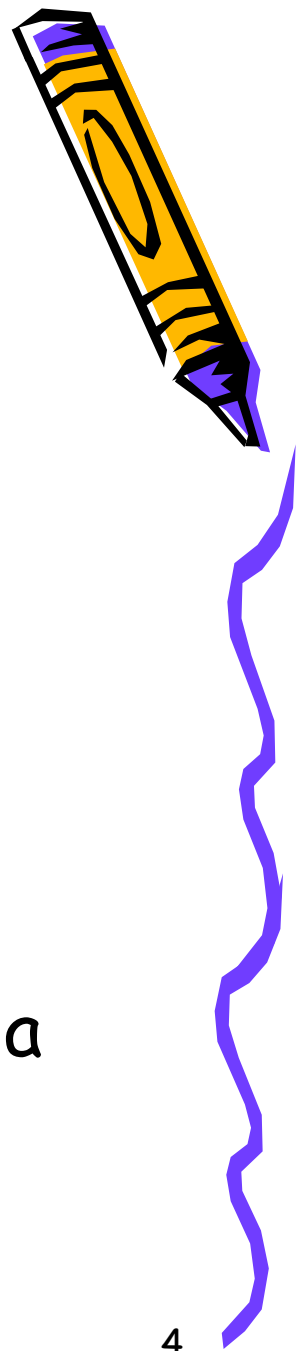
- Съвкупност от елементарни количества и **СИМВОЛИ** за тяхното означаване, наричани **цифри**
- Съвкупност от **правила за изобразяване** на произволно количество и **правила за опериране с числата**



Бройни системи

Бройна система се нарича начинът на изобразяване на числата с помощта на ограничен брой символи, имащи определени количествени значения

- Символите, с които се изобразяват числата, се наричат **цифри**
- Наборът от символи (цифри) се нарича **азбука** на бройната система

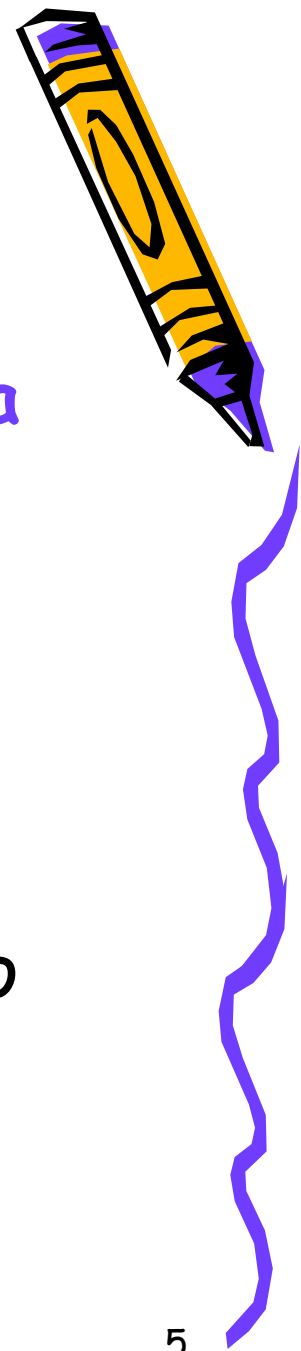


Бройни системи

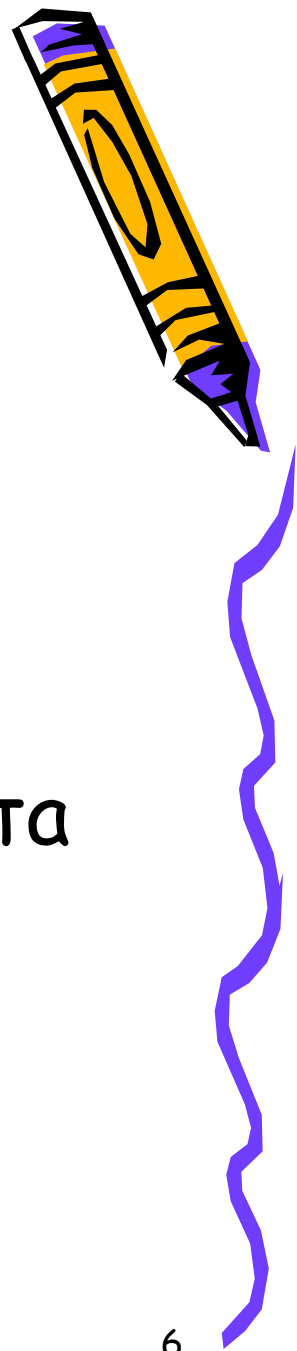
Избор на БС система за реализация на цифрови изчислителни устройства

Най-често се използват два критерия:

- оценка на **обема апаратни разходи**, които са направени за тяхната реализация
- оценка за **бързодействието** на тяхното функциониране



Бройни системи



Бройните системи са:

- Позиционни
- Непозиционни

Най-разпространена е позиционната система на записване



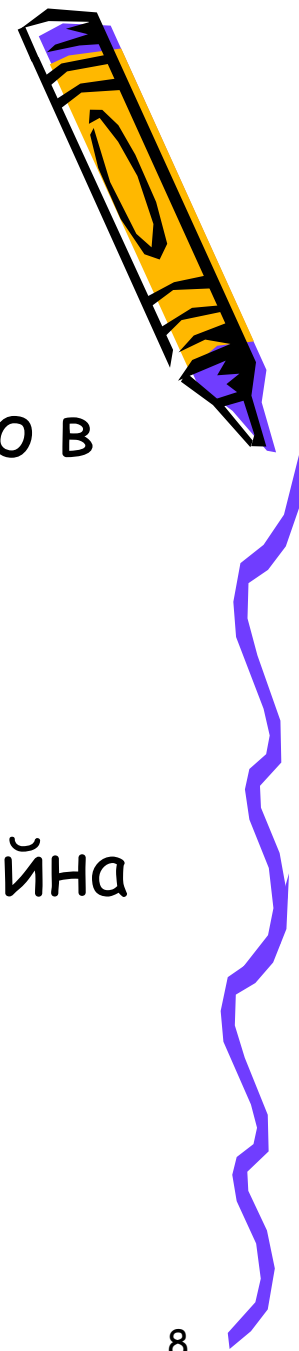
Позиционни Бройни Системи(ПБС)



- Всяка цифра има определено **тегло**, зависещо от позицията на цифрата в последователността, изобразяваща числото
- Позицията на цифрата се нарича **порядък (разряд)**
- Броят на цифрите, които съдържа бройната система, се нарича **основа на бройната система**



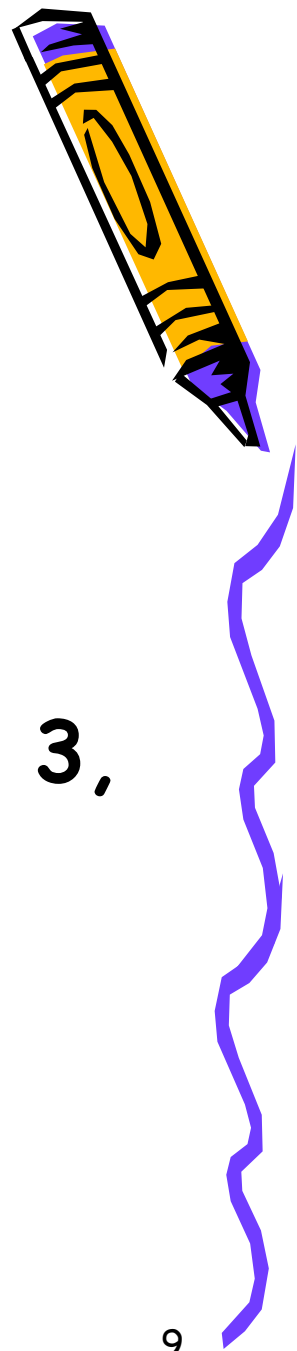
Бройни Системи



- Едно число може да бъде представено в различни бройни системи
- Във всяка от тях то трябва да се представи по един единствен начин
- Съществуват алгоритми (правила) за преобразуване на числата от една бройна система в друга



Десетична Позиционна Система



- Азбуката на десетичната бройна система съдържа **десет знака** (цифри), използвани за представяне на числата: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Числото 10 се нарича **основа на бройната система**





- Едно произволно число може да бъде записано в десетична бройна система по един единствен начин:

$$35187 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Всяко число **N** може да се представи във вида:

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

където $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ са десетични цифри

$$0 \leq a_i \leq 9, i=0,1,2,\dots,k, a_k \neq 0$$



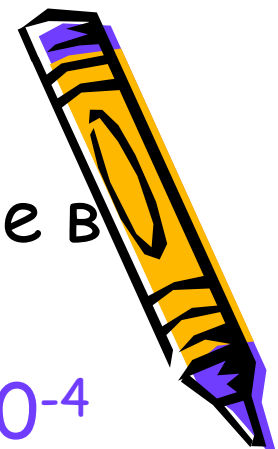
- Това твърдение за естествените числа е в сила и за десетичните дроби

$$5,2187 = 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$$

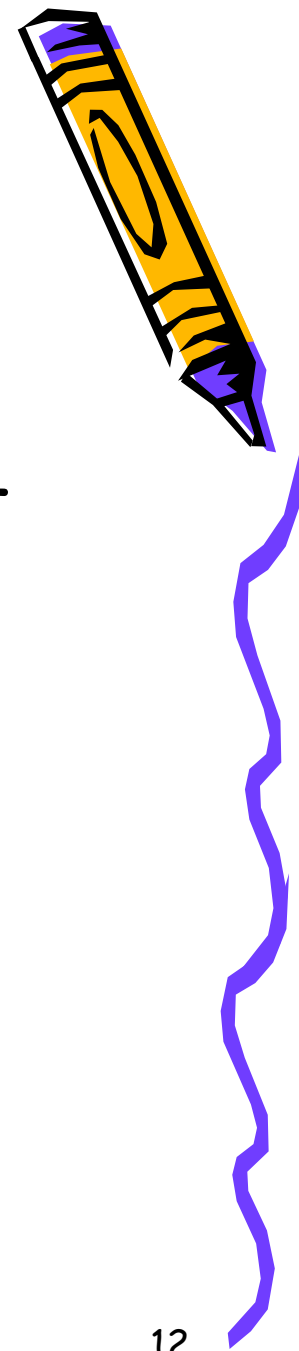
- Всяка десетична дроб N може да се представи във вида:

$$N = a_m \cdot 10^m + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{-q} \cdot 10^{-q}$$

където $a_m, \dots, a_1, a_0, \dots, a_{-q}$ са десетични цифри
 $0 \leq a_i \leq 9, i=0,1,2,\dots,q, a_q \neq 0$



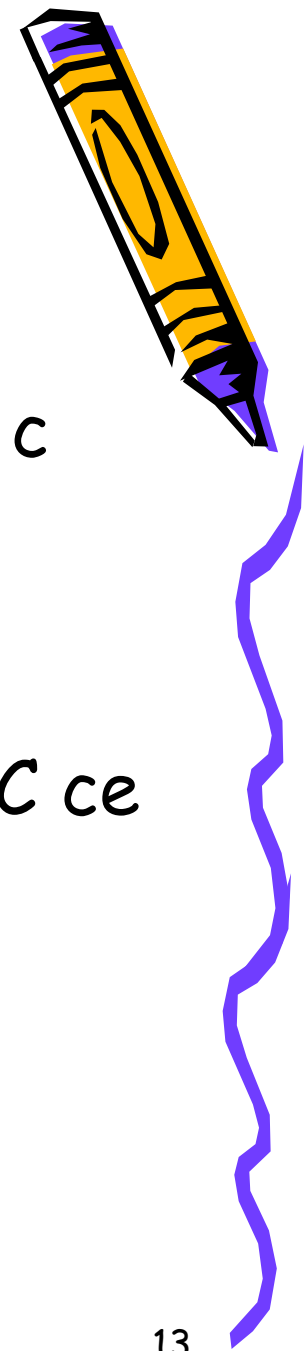
Двоична Бройна Система (ДБС)



- Числото 10 може да бъде заменено от кое да е естествено число b , $b \geq 2$
- При $b=2$ позиционната система на представяне се нарича **двоична**
- Азбуката на ДБС се състои от два символа - 0 и 1



Двоична Бройна Система



- Едно число в ДБС се представя само с цифрите 0 и 1, например 10010011101
- Цифрите 0 и 1 са цифри и от десетичната БС, за да е ясно в каква БС се записва числото, нейната основа се записва като индекс към числото:
 $10111001001_{(2)}$



Двоична Бройна Система



- Едно двоично число може да се представи по следният начин:

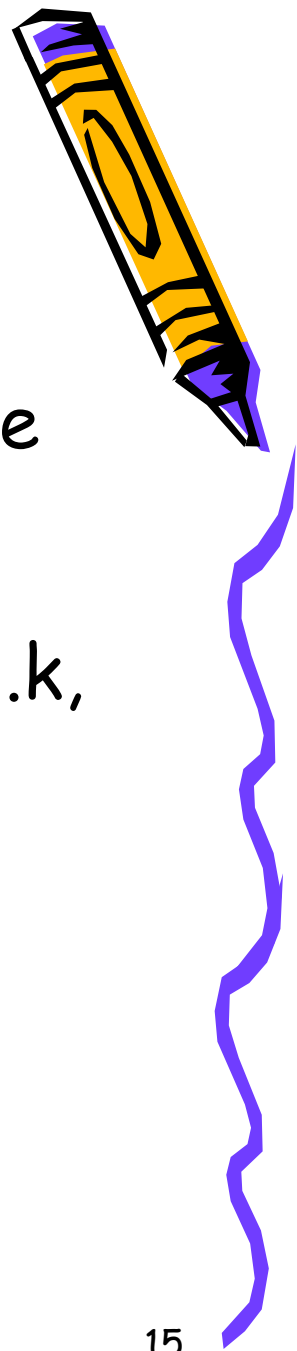
$$10111001001_{(2)} = 1.2^{10} + 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^3 + 1.2^0$$

Примери:

1. Намерете десетичния запис на :
101101, 1001110, 101.1, 0.1, 1101.01



Преобразуване от Десетична в Двоична БС



- Нека N е десетично число, което може да се представи във вида:

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

където $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $i = 0, 1, 2, \dots, k$,
 $a_k \neq 0$

В ДБС същото число би изглеждало по следният начин:

$$N = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0$$

където $b_i \in \{0, 1\}$ $i = 0, 1, 2, \dots, m$; $b_m \neq 0$

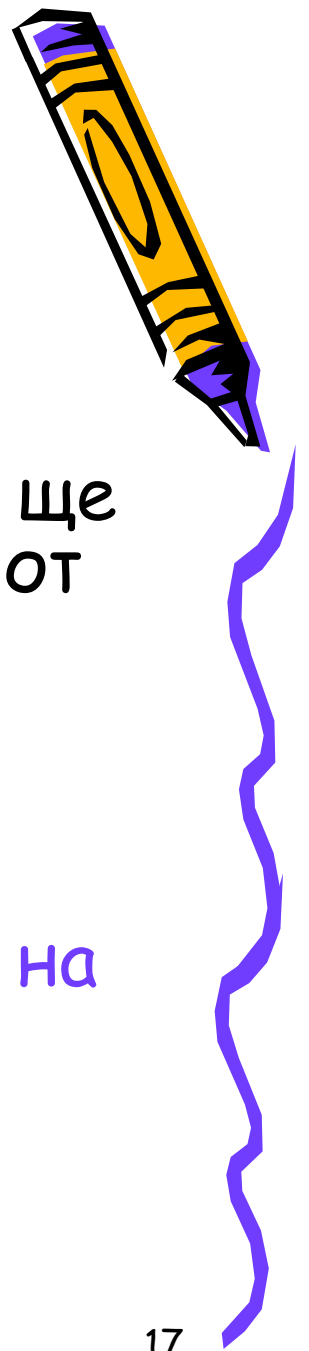




Преобразуване от Десетична в Двоична БС

- Ако **се раздели** числото N на 2 се получава: $N/2 = N_1 + b_0/2$,
- където $N_1 = b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + b_{m-2} \cdot 2^{m-2} + \dots + b_2 \cdot 2^1 + b_1$ **е частното** от делението на числото N на 2
- Цифрата b_0 **е остатък** от целочисленото деление на десетичното число N и същевременно **последна цифра** от двоичното представяне на числото N





Преобразуване от Десетична в Двоична БС

- При по-нататъшното прилагане на правилото към числото N_1 , **остатъкът** ще представлява **предпоследната цифра** от двоичното представяне на N_1
- Продължението на процеса води до определяне на **следващите цифри** в двоичното представяне на числото
- Процесът продължава до **получаване на цяла част 0**, при деление на 2



- Пример за преобразуване на $73_{(10)}$ в ДВОИЧНО:

$$73 / 2 \Rightarrow 36 + 1, b_0 = 1$$

$$36 / 2 \Rightarrow 18 + 0, b_1 = 0$$

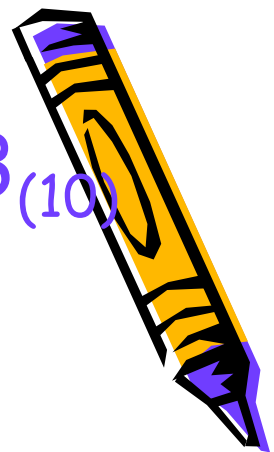
$$18 / 2 \Rightarrow 9 + 0, b_2 = 0$$

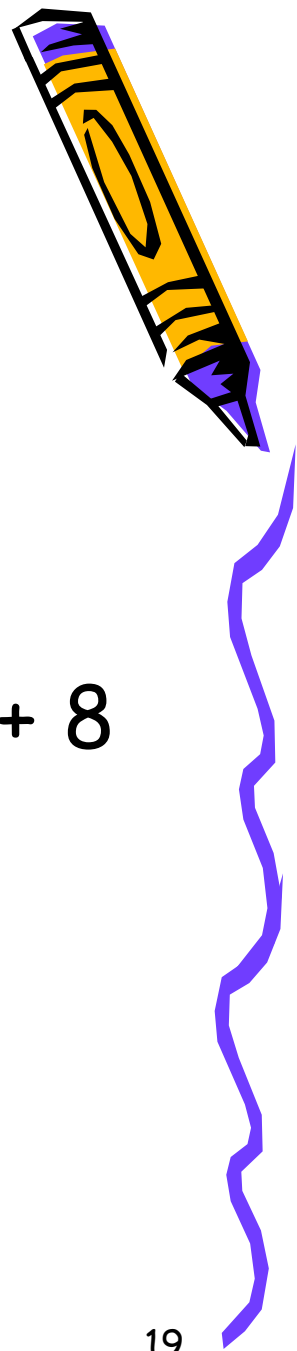
$$9 / 2 \Rightarrow 4 + 1, b_3 = 1$$

$$4 / 2 \Rightarrow 2 + 0, b_4 = 0$$

$$2 / 2 \Rightarrow 1 + 0, b_5 = 0$$

$$1 / 2 \Rightarrow 0 + 1, b_6 = 1$$

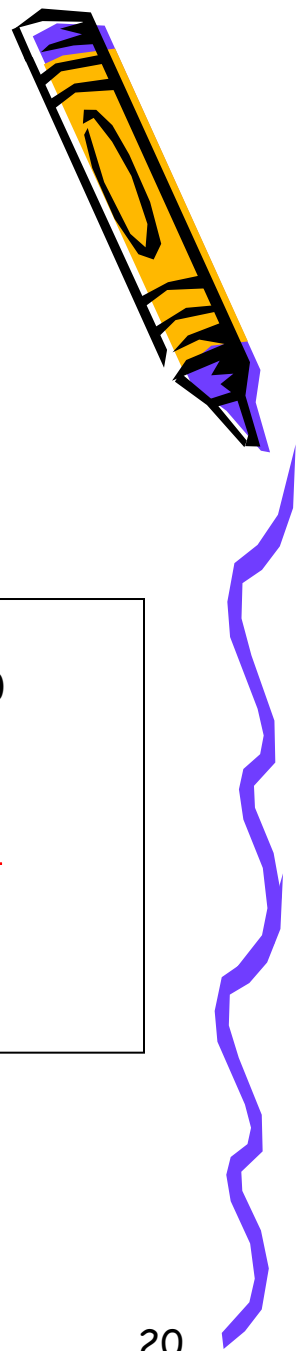




- $73_{(10)} = 1001001_{(2)}$
- Проверка за верността на това преобразуване е обратното преобразуване:
- $1001001_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 1 = 73_{(10)}$



ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ДРОБНИ ЧИСЛА ОТ ДЕСЕТИЧНА В ДБС



$$0.125_{(10)} = \text{...}$$

цяла част	
$0.125 * 2 \rightarrow$	0
$0.25 * 2 \rightarrow$	0
$0.5 * 2 \rightarrow$	1
0.0	

$$0.125_{(10)} = \text{...}$$

	*2	*2	*2	*2				
0.125₍₁₀₎	→	0.25	→	0.5	→	1.0	→	0.0
		↓		↓		↓		
цяла част		0		0		1		
								



...

д.ч.	цяла част
$0.94 \cdot 2 \rightarrow 1$	
$0.88 \cdot 2 \rightarrow 1$	
$0.76 \cdot 2 \rightarrow 1$	
$0.52 \cdot 2 \rightarrow 1$	
$0.04 \cdot 2 \rightarrow 0$	
$0.08 \cdot 2 \rightarrow 0$	
$0.16 \cdot 2 \rightarrow$	
...	

Тъй – като не се получава дробна част 0, закръгляваме с точност до четвъртия знак след десетичната точка

$$0.94_{(10)} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right) = \frac{1}{100}$$



ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ДРОБНИ ЧИСЛА ОТ ДЕСЕТИЧНА В ДБС



1. Умножаваме дробната част с числото 2 и получаваме нова дробна част и цяла част (0 или 1)
2. Продължаваме да умножаваме получената дробна част по основата 2, докато се получи нова дробна част равна на 0
3. Получените цели части при умножението представляват дробната част на преобразуваното число
4. Записват се в реда, в който са получени



Умножението на дробните части с 2 **продължава** до получаване на **определена точност**, тъй-като дробната част може никога да не стане равна на нула.

Обикновено се задава точност на пресмятането.

Намерете двоичното представяне на десетичното число: $380.94_{(10)} = \dots$

Цялата част преобразуваме по правилото за преобразуване на цели числа, а дробната част - отделно по правилото за преобразуване на дробни числа.

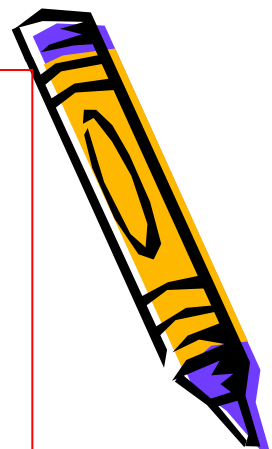
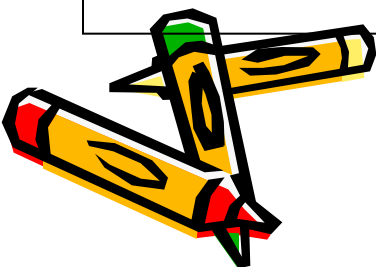
$$380_{(10)} =$$

$$100_{(2)}$$

$$0.94_{(10)} = \dots$$

$$380.94_{(10)} =$$

$$100.1111_{(2)}$$



Пример

Да се превърне
числото $57.25_{(10)}$ в
двоична БС

$$57_{(10)} = 111001_{(2)}$$

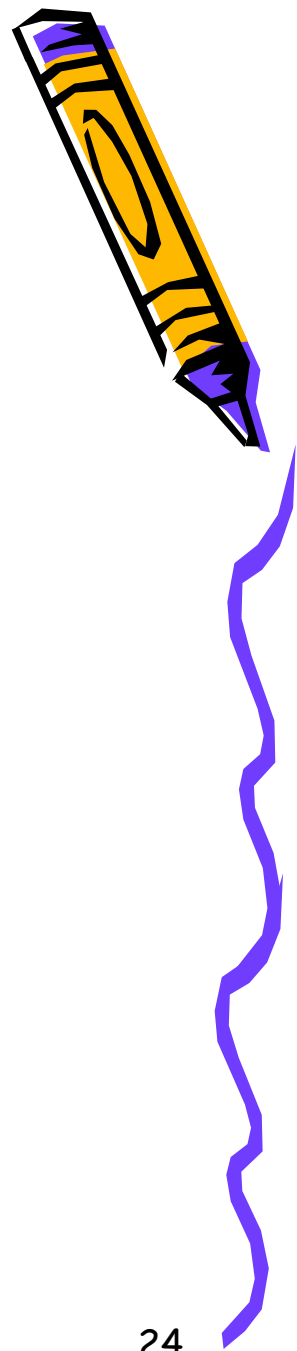
$$0.25 * 2 = 0.5 \rightarrow 0$$

$$0.5 * 2 = 1.0 \rightarrow 1$$

$$0.0$$



др.ч.	ц.ч.
0.5	0
0	1

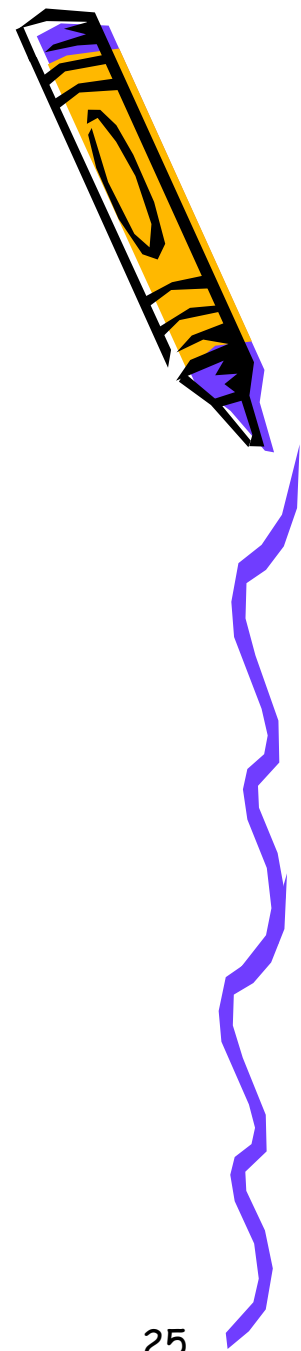


Резултатът се записва в реда на
получаването му :

$$0.25_{10} = 0.01_2$$

$$57.25_{10} = 111001.01_2$$

Забележка: обикновено при
преобразуване на дробни числа се
задава **точност на пресмятането**, тъй-
като рядко се получава дробна част 0

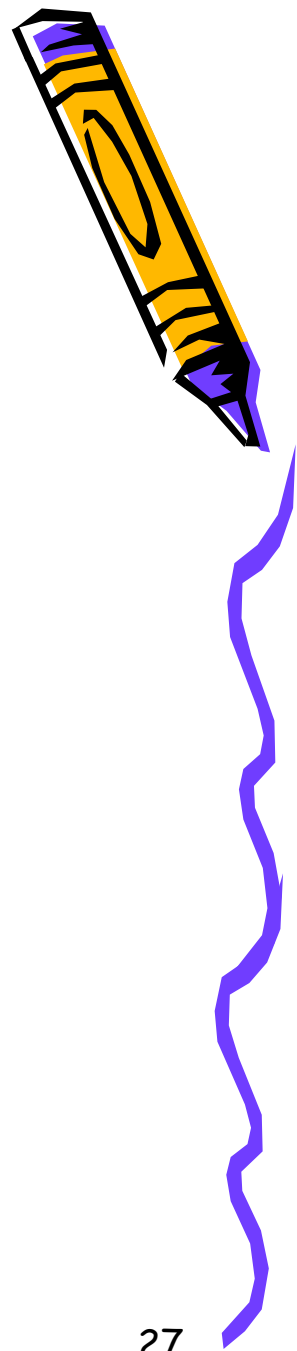


Задачи

Да се преобразуват от десетична в двоична БС числата:

- 1) 512, 901, 1024, 46, 999, 1024.001
- 2) 0.541, 0.125, 25.179, 64.267,
512.378, 202.074





Преобразуване на числа от Десетична в Осмична БС

Осмична БС (ОСТ - Остал осмичен)

Знаците, които се използват са 8

0,1,2...7 , а 8 е основа на БС

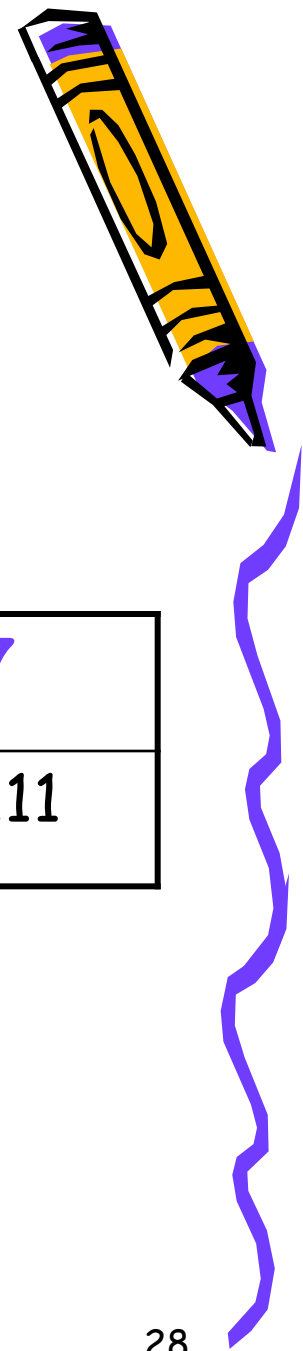
Да се преобразуват числата:

1) 16, 139, 260, 527, 0.64, 0.368

2) 16.42, 12.368, 731.268, 43,69



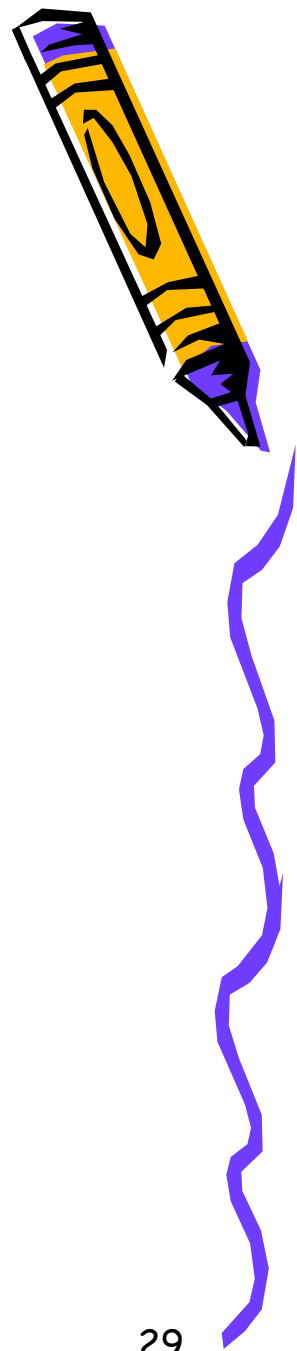
Преобразуване на числа от Двоична в Осмична БС



0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111



Преобразуване на числа от Двоична в Осмична БС и обратно



1. Да се преобразуват числата от **ДБС** в **ОБС**

а) 101011101, 111000011011101, 11101011

б) 101010.0110111101, 111110101.1100111

2. Да се преобразуват от **ОБС** в **ДБС**

а) 107, 23, 506, 0.12, 0.74

б) 46.71, 173.02, 361.305



Шестнадесетична Бройна Система

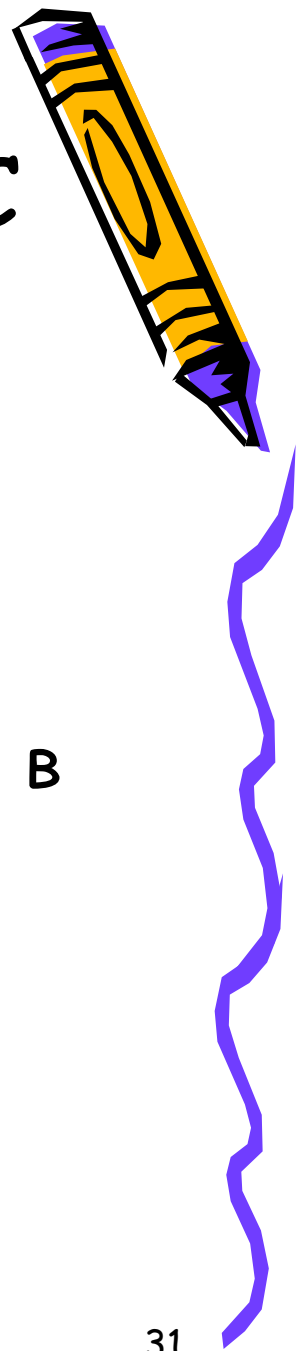


Шестнадесетичната бройна система (HEX Hexadecimal - шестнадесетичен) има азбука, която съдържа **16 знака**

- Като графични знаци се използват цифрите на десетичната бройна система, допълнени с главни букви от латинската азбука: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**
- Шестнадесетичната бройна система се използва в компютърните технологии главно за **КОМПАКТНО записване** на двоични числа



Преобразуване на числа от Десетична в Шестнадесетична БС



1. Да се преобразуват числата в ШБС:

a) 16, 139, 260, 527, 0.64, 0.368

b) 16.42, 12.368, 731.268, 43,69

2. Превърнете дадените осмични числа в шестнадесетични:

a) $76035_{(8)}$, $607134_{(8)}$

b) $27.35_{(8)}$, $106.45_{(8)}$

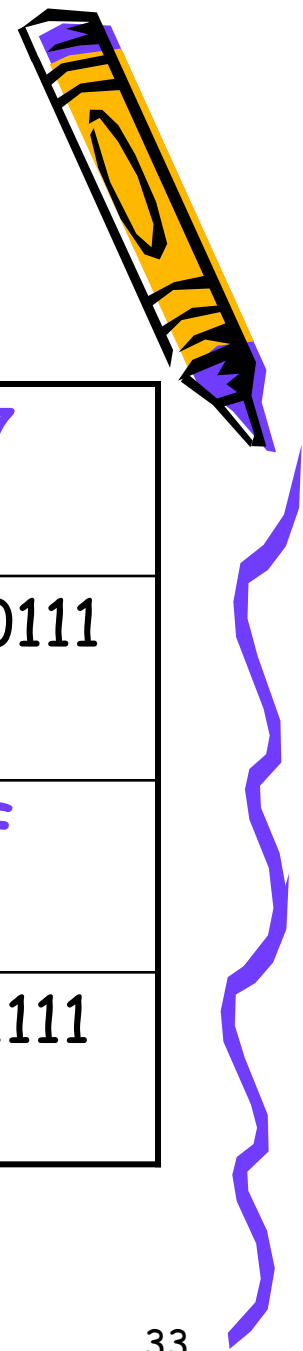




- При преобразуване на двоично число в шестнадесетично, всяка **четворка двоични цифри** се заменя със съответна **шестнадесетична** цифра(буква)
- При обратното преобразуване всяка **шестнадесетична** цифра(буква) трябва да се замести със съответна **четворка двоични цифри**

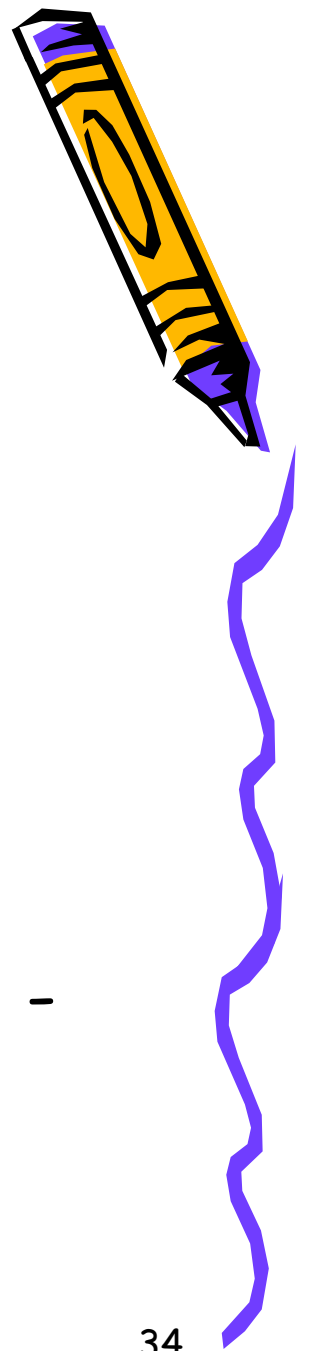


Шестнадесетична Бройна Система



0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
8	9	A	B	C	D	E	F
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111





- Разделянето на двоичното число на четворки започва **отдясно наляво** и за последната група (първите цифри на двоичното число) се допълват незначещи нули, ако е необходимо.

Пример:

- Преобразуване на число от двоична система в шестнадесетична
 $10110010010011110_{(2)} : 0010\ 1100\ 1001$
 $0011\ 1110_{(2)} = 3\ C\ 9\ 3\ E$ -
шестнадесетичното число е $3C93E_{(16)}$

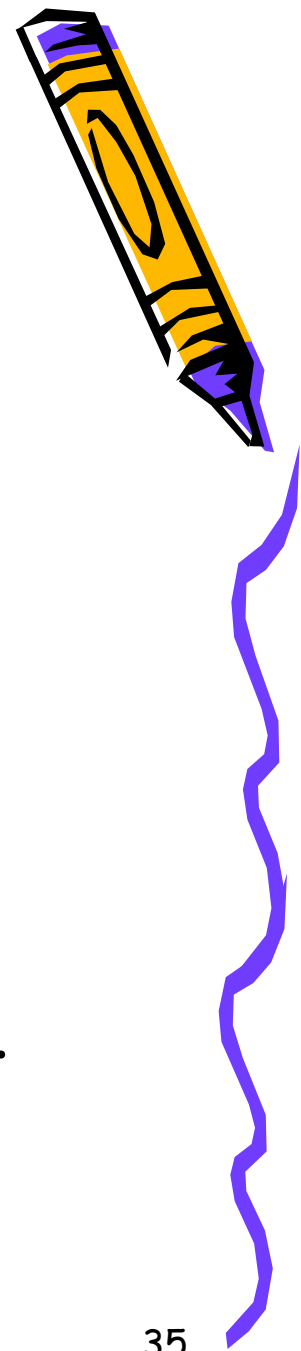


Примери

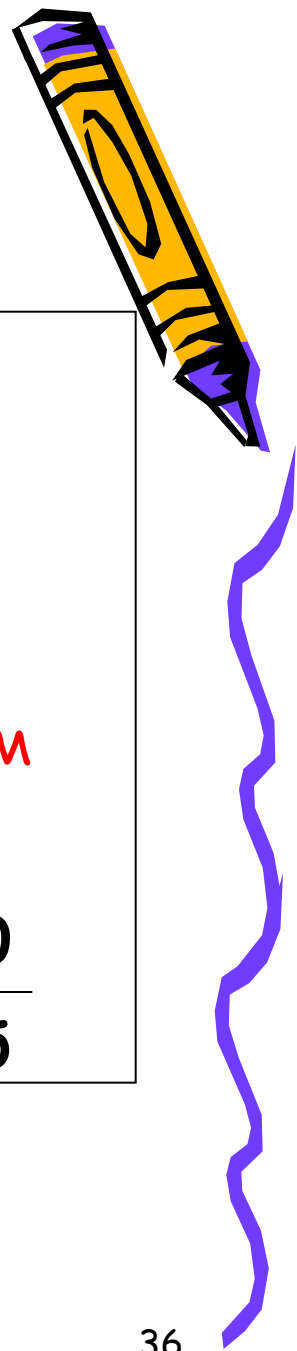
1. Запишете дадените шестнадесетични цифри като двоични:

A01, 30B7, FFAB, ABBA, C59D

- Преобразувайте от ДБС в ШБС:
10010111011010, 10101111010101
1111110101010111, 11101.01010111



5. Двоична Аритметика:



➤ Събиране:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10 \text{ пренос}$$

$\begin{array}{r} 100101 \\ + 10110 \\ \hline 111011 \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ + 22 \\ \hline 59 \end{array}$
---	--

➤ Изваждане:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

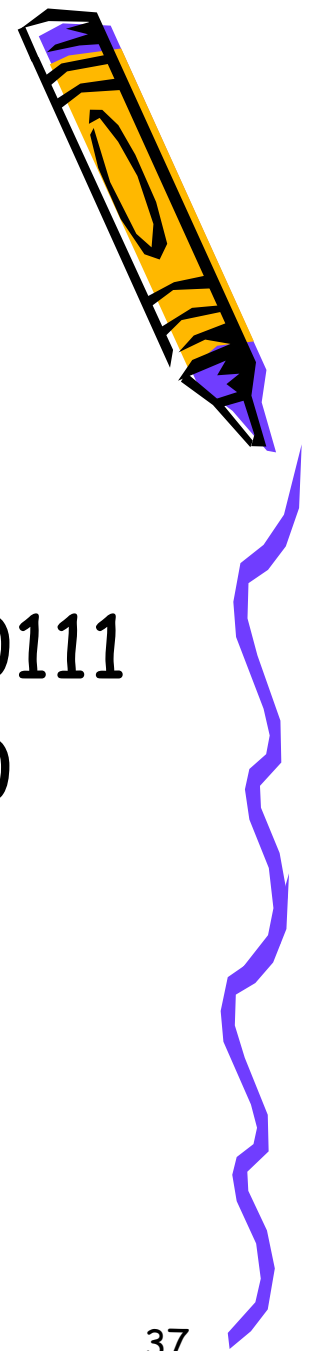
$$1 - 1 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \text{ със заем}$$

$\begin{array}{r} 101101 \\ - 10100 \\ \hline 11001 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ - 20 \\ \hline 25 \end{array}$
--	--



Задачи:



1. Пресметнете двоичните изрази:

a) $10111 + 1011$, $100101 + 10110$

b) $101.111 + 11.101$, $1101.1011 + 1011.0111$

c) $101101 - 10100$, $11010011 - 110110$

d) $1111101 - 101111$, $101.011 - 11.110$



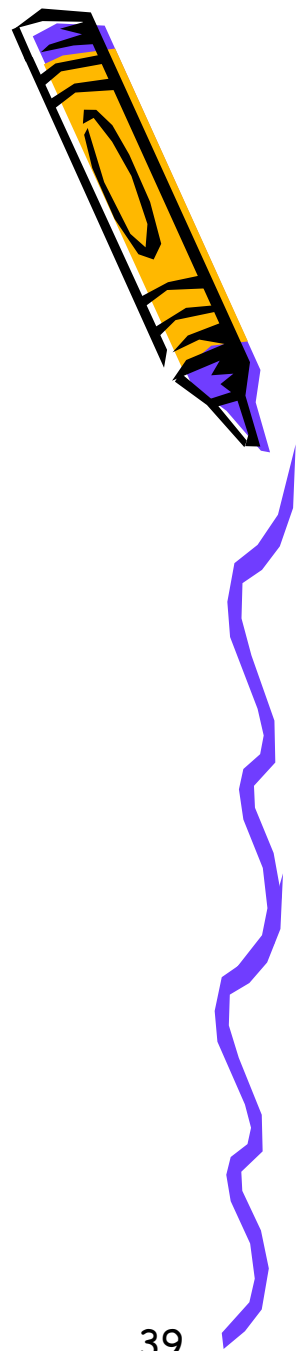
Представяне на Числата В Прав Код



- Когато машинният код е построен в пълно съответствие с естествения вид на числото , той се нарича **прав код**
- За да се представи едно число в прав код, първо трябва да бъде **преобразувано в двоична БС**



Представяне на числата в прав код

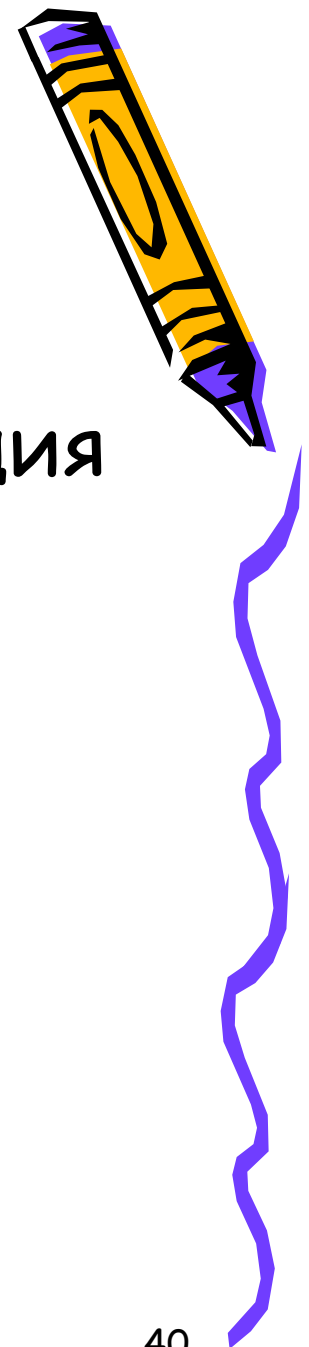


Правият код на едно двоично число формално може да се определи по следния начин:

$$[X]_{\text{ПК}} = \begin{cases} X, & \text{ако } X \geq 0; \\ 2^{n-1} + |X|, & \text{ако } X \leq 0. \end{cases}$$



Представяне на числата в прав код



- Правият код е двоична комбинация от вида:

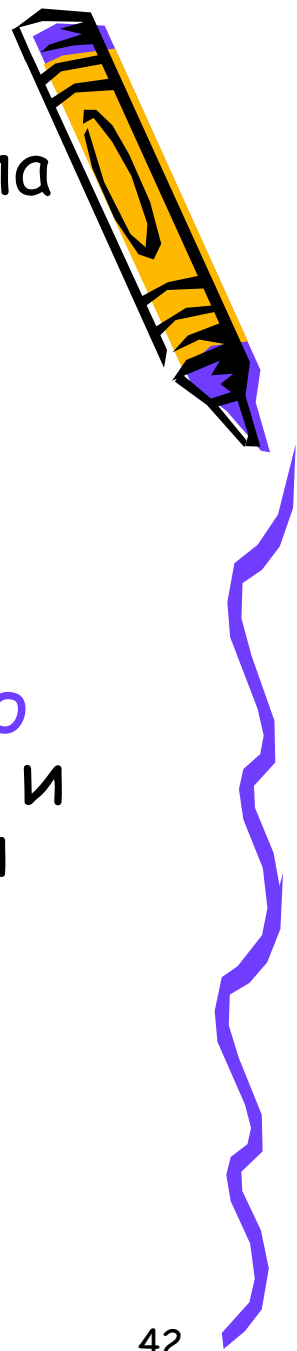
$$[X]_{\text{ПК}} = \begin{cases} 0 \ 00 \dots 0xxx \dots xx, & \text{ако } X \geq 0; \\ 1 \ 00 \dots 0xxx \dots xx, & \text{ако } X \leq 0. \end{cases}$$



- По силата на това определение може да се каже, че на всяка кодова комбинация, която може да се представи в разрядната мрежа, съответства **едно единствено число**
- **Изключение прави числото 0**, в съответствие, на което съществуват две комбинации: **(000...0)** и **(100...0)**
- Тези две комбинации се интерпретират като код на числата **+0** и **-0** съответно.



- Диапазонът на така представяните числа е напълно **симетричен относно нулата**, т.е. $|X_{\min}| = |X_{\max}|$
- Правият код на представимите числа е удобен с това, че **цифровата част на разрядната мрежа съдържа модула на числото**
- Цифрите от **естественния вид на числото** са крайно необходими в редица случаи и в частност при прилагане на алгоритми за преобразуване на числото от една бройна система в друга



- Правият, обратният и допълнителният код се отнасят за числа в двоична БС
- **Прав код (ПК)** - Прав код е самото число представено в двоична бройна система, като **най-старшият му бит (този най-вляво)** е **знаковия бит**, а останалите са самата стойност на числото. Прав код е:

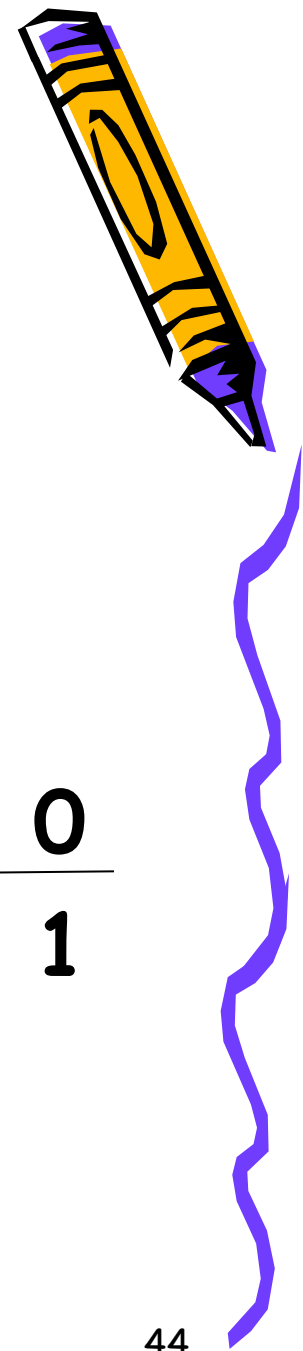
Знаков бит	7	6	5	4	3	2	1	0
	0	0	1	1	1	0	1	0



Обратен Код (ОК)

Обратен код - получава се като се инвертират всички битове на правия код, освен знаковия

Знаков бит	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1





Допълнителен код (ДК)

- Най - левият бит се използва за означаване знака на числото. За положителни числа се записва 0, а за отрицателни 1
- Положителните числа се записват по един и същи начин в ПК, ОК, и ДК.
- Отрицателните се записват по различен начин. За да се преобразува до допълнителен код, се инвертират информационните битове на числото(ОК) и към получения резултат се прибавя 1



Допълнителен код

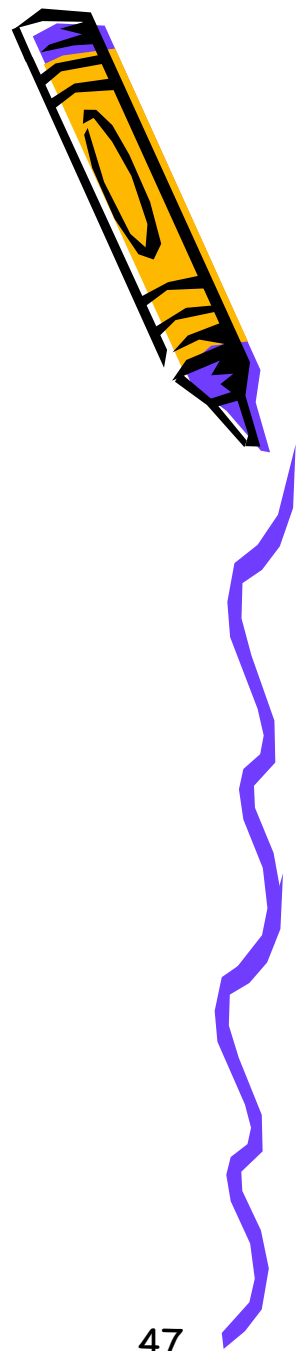
Допълнителен код - получава се като към обратния код на числото се прибави "1" към най-младшия разряд (най-десния)

Пример: $-5_{10} = 1101_2$ ПК

1) Инвертираме 1010 ОК

2) Прибавяме 1
 $+ 1$
 1011 ДК

ПРИМЕР 1. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=30$, $Y=45$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в обратен код.



$$[X]_{\text{OK}} = 0 \ 0011110$$

+

$$[Y]_{\text{OK}} = 0 \ 0101101$$

$$[Z]_{\text{OK}} = 0 \ 1001011 \quad V=0, \text{ резултатът е верен.}$$

$$[Z]_{\text{OK}}]_{\text{OK}} = [Z]_{\text{ПК}} = 0 \ 1001011 = +75.$$



ПРИМЕР 2. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=-30$, $Y=45$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в обратен код.

$$[X]_{\text{ПК}} = 1\ 0011110$$

$$\begin{array}{r} [X]_{\text{OK}} = 1\ 1100001 \\ + \\ [Y]_{\text{OK}} = 0\ 0101101 \\ \hline 0\ 0001110 \\ + \\ \text{циклически пренос при ОК.} \\ \hline [Z]_{\text{OK}} = 0\ 0001111 = +15. \end{array}$$

$V=0$, резултатът е верен.



ПРИМЕР 3. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X= -30$, $Y= -45$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в обратен код.

$$[X]_{\text{ПК}} = 1\ 0011110$$

$$[Y]_{\text{ПК}} = 1\ 0101101$$

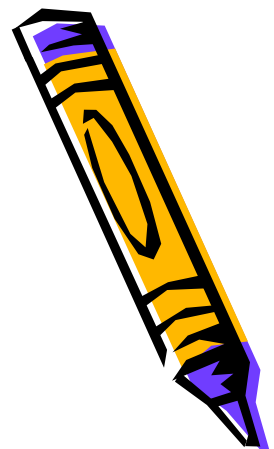
$$\begin{array}{r} [X]_{\text{ОК}} = 1\ 1100001 \\ + \\ [Y]_{\text{ОК}} = 1\ 1010010 \\ \hline 1\ 0110011 \\ + \end{array}$$

циклически пренос при ОК.

$$[Z]_{\text{ОК}} = 1\ 0110100$$

$V=0$, резултатът е верен.

$$[[Z]_{\text{ОК}}]_{\text{ОК}} = [Z]_{\text{ПК}} = 1\ 1001011 = -75.$$



ПРИМЕР 4. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=30$, $Y=-30$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в обратен код.

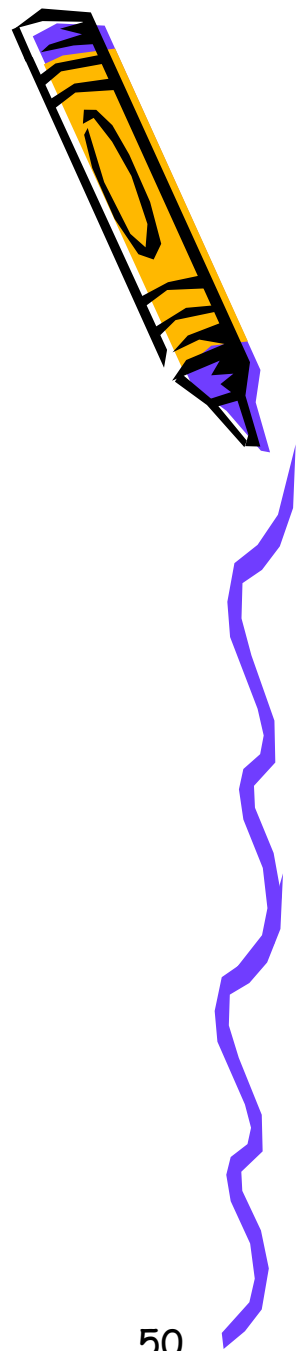
$$[X]_{OK} = 0 \ 0011110$$

+

$$[Y]_{OK} = 1 \ 1100001$$

$$[Z]_{OK} = 1 \ 1111111 \quad V=0, \text{ резултатът е верен.}$$

$$[Z]_{PK} = 1 \ 0000000 = -0.$$



ПРИМЕР 5. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=30$, $Y=-30$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в допълнителен код.

$$[X]_{\text{ДК}} = 0 \ 0011110$$

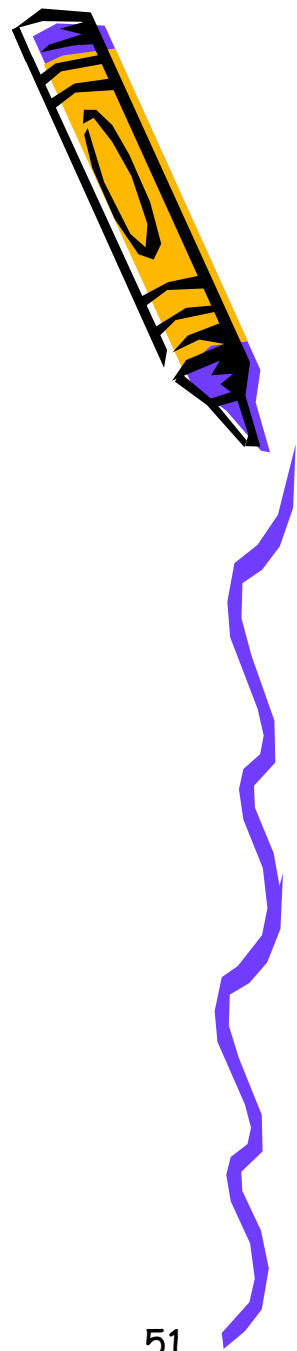
+

$$[Y]_{\text{ДК}} = 1 \ 1100010$$

$$[Z]_{\text{ДК}} = 0 \ 0000000$$

$$Z = +0.$$

$V=0$, резултатът е верен.



ПРИМЕР 6. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=-96$, $Y=-32$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в допълнителен код.

$$[X]_{\text{ДК}} = 1 \ 0100000$$

+

$$[Y]_{\text{ДК}} = 1 \ 1100000$$

$$[Z]_{\text{ДК}} = 1 \ 0000000$$

$V=0$, резултатът е верен.

$$[[Z]_{\text{ДК}}]_{\text{ДК}} = [X]_{\text{ПК}} = 1 \ 1111111$$

+

1

$$0 \ 0000000$$

обратен код

смяна на знака, т.е. препълване!

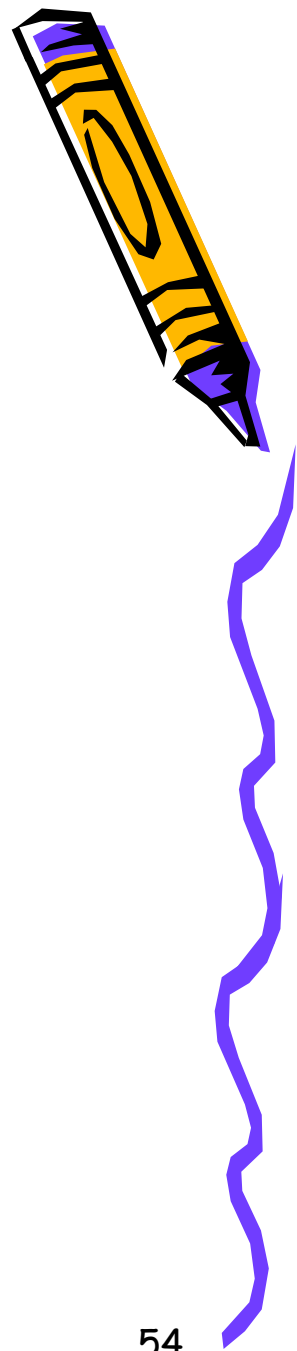




- Полученият резултат е отрицателното число $X = -96 - 32 = -128$, което в **прав код не може** да бъде изобразено в разрядна мрежа с посочената дължина от **8 бита**
- Възниква пренос от знаковия бит, който има стойността на истинския знак на числото
- В допълнителен код, обаче числото е представимо и съответства на съдържанието 1 00000000



ПРИМЕР 7. Да се изпълни операция събиране $Z=X+Y$ на числата $X=-96$, $Y=-96$, които са представени в разрядна мрежа с дължина $n=8[b]$, в допълнителен код.



$$[X]_{\text{ДК}} = 1 \ 01000000$$

+

$$[Y]_{\text{ДК}} = 1 \ 01000000$$

$$[Z]_{\text{ДК}} = 0 \ 10000000$$

$V=1$, препълване отляво (отрицателно)!

Резултатът не е верен!



Двоично - Десетични Числа



Двоично кодирани десетични числа, наричани двоично - десетични (BCD)

BCD числа се представят най-често във форма с **фиксирана запетая**, т.е. като **последователност** (низ) от **двоични кодове на десетичните** цифри на числото

Формати за съхраняване на BCD числа

- **пакетиран**
- **непакетиран**



Двоично - Десетични Числа



- **Пакетиран формат** на едно двоично - десетично число представлява последователност от **4-битови** двоични кодове на неговите цифри
- **7095** може да се представи в пакетиран формат чрез **<cd7> <cd0> <cd9> <cd5>**, която се разполага в поле с дължина **2B**



Двоично - десетични числа



- Когато едно BCD число се представя като **число със знак**, той се кодира с **4битова** кодова комбинация, **несъответстваща** на десетичната цифра (чрез свободните комбинации на използвания код на цифрите)
- Допуска се да предхожда или да следва цифровата част ($\pm dd\dots d$ или $dd\dots d\pm$)
- Пакетираният формат е удобен и като вътрешно машинен при непосредственото обработване на двоично - десетичните числа



Двоично - десетични числа

Непакетираният формат представя десетичното число като последователност от кодовете на отделните цифри, знак, десетичен разделител (,) и др., според кодовата таблица на използвания стандарт



Непакетиран формат на BCD числа



- Младшите 4 бита на символния код представляват кода на десетичната цифра
- Старшите 3 (или 4) бита са без значение за представяното число
- Същото число 7095, според ASCII таблицата например, ще има следният непакетиран формат:



Непакетиран формат на BCD числа



0011	0111	0011	0000	0011	1001	0011	0101
K3		K3		K3		K3	
	7		0		9		5

- K3 – код на зоната в кодовата таблица:
- K3 = 0011 = 0 011

