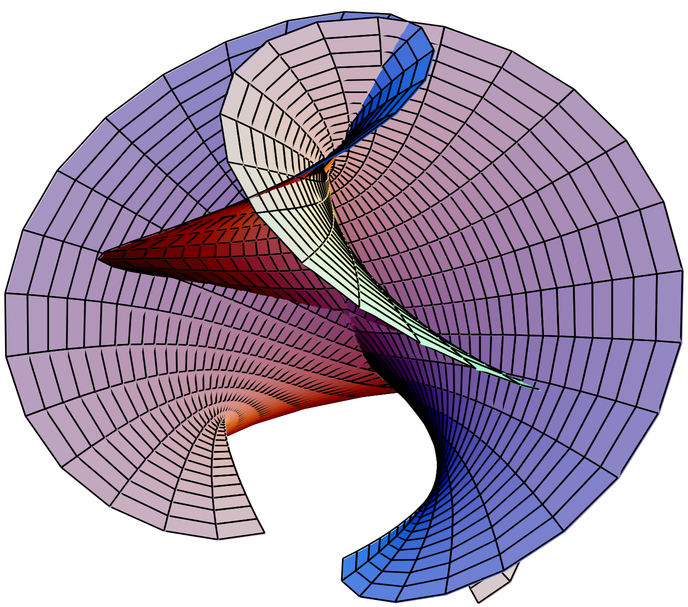
Върху минимални повърхнини чрез комплексни променливи



Дипломна работа

на Борислава Шомова

спец. Математика

фак. № 0701051032

Научен ръководител:
доц. д-р Манчо Манев

Увод

В настоящата разработка се запознаваме с изучаване на минималните повърхнини.

Нашите разглеждания се градят върху теорията за комплексните функции на една променлива.

През 1866 г. Вайерщрас извършва голям пробив в тази насока.

Той открива формула чрез комплексни променливи, които позволяват лесно създаване на нови минимални повърхнини и позволява тяхното проучване в по-общ план.

§ 1. Изометрични деформации на минимални повърхнини

- Определение 1.2. ***Минимална изотермална повърхнина*** x: U → R^n *е повърхнина, която е както изотермална, така и хармонична.*
- Теорема 1.3. *Нека $x, y : U \to R^n$ са спрегнати хармонични изотермални повърхнини, at → z[t] е асоциираното семейство. Тогава z [t] е минимална изотермална повърхнина за всяко t и всички повърхнини в семейството имат същата първа основна форма.*

§2. Комплексни производни

Казваме, че $z[t]$ е ***изотермална деформация*** от x до y, ако

$$E(t) = \vec{z}[t]_u \cdot \vec{z}[t]_u = (\vec{x}_u \cos t - \vec{x}_v \sin t) \cdot (\vec{x}_u \cos t - \vec{x}_v \sin t) .$$

- **Определение.** ***Комплексна производна*** на повърхнина $x: U \to R^n$ е дадена чрез

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \frac{1}{2} (\vec{x}_u - i\vec{x}_v) ,$$

където $z = u + iv$.

§3. Минимални криви

Определение. Нека U е отворено подмножество на C. ***Минимална крива*** е комплексно аналитична функция $\psi : U \to C^n$ такава, че $\Psi'(z) \cdot \Psi'(z) = 0$
за z от U.
Ако в допълнение $\Psi'(z) \cdot \overline{\Psi'(z)}$ никога не е нула за z от U, казваме, че Ψ е ***правилна минимална крива***.

Определение 3.2. ***Изображението на Гаус на минимална крива*** Ψ е изображението на Гаус на всеки член от асоциираното семейство на Ψ, определено чрез единичния нормален вектор U.

§4. Намиране на спрегнати минимални повърхнини

- Определение 4.1. Изображението $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, чиито компоненти изпълняват (4.2), се нарича ***комплексификация*** на x.
- Следствие 4.2. *Нека $x : U \to R^n$ е минимална изотермална повърхнина, където U е отворено подмножество на* $R^2 = C$ *съдържащо (0, 0). Нека $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ е комплексификацията на x, такава че $Im\Psi(0) = 0$. Следователно*

$$\Psi(z) = 2\vec{x}\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \vec{x}(0,0)$$

и спрегнатата хармонична изотермална повърхнина y на x с $y(0, 0) = 0$ е зададена чрез

$$\vec{y}(u,v) = \Im\mathrm{m}\left(2\vec{x}\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - \vec{x}(0,0)\right).$$

§4.1. Повърхнината на Енепер от степен n

- Една от най-простите минимални повърхнини е тази, която е открита от Алфред Енепер през 1864 г. Тя е определена чрез

$$\overrightarrow{en}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,-v+\frac{v^3}{3}-vu^2,u^2-v^2\right).$$

§5. Изображение на Вайерщрас

- Определение 5.1. Изображението x е наречено ***повърхнина на Вайерщрас***, а y – ***спрегна повърхнина на Вайерщрас*** започващи от z_0, определени от f (z) и g (z).
- Теорема 5.7. *Нека U е единичната нормала на повърхнината на Вайерщрас, определена от мероморфните функции f, g. Тогава st ∘U, разгледано като функция на комплексна променлива е точно функцията g.*

$$\overrightarrow{st} \circ \vec{U} = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{fg}{f\left(1-g^2\right)/2 + f\left(1+g^2\right)/2} = g.$$

Гаусова кривина

- Теорема 5.6. *Гаусовата кривина на повърхнината на Вайерщрас, определена от мероморфните функции* f *и* g*, има вида*

$$K = \frac{-16\left|g'\right|^2}{\left|f\right|^2\left(1+\left|g\right|^2\right)^4}.$$

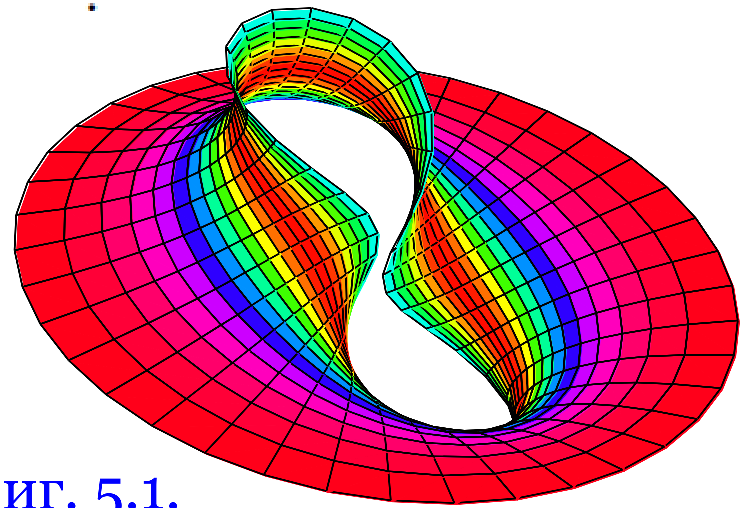
Същата формула е в сила и за гаусовата кривина на всеки член от асоциираното семейство, включително и спрегнатата повърхнина на Вайерщрас, определена от f*,* g*.*

§5.1. Минимална повърхнина на Ричмънд

- Интересна поредица от минимални повърхнини, по-сложна както от катеноида, така и от повърхнината на Енепер, е създадена от изображението на Вейерщрас, когато

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \qquad g(z) = z^{n+1}.$$

- Тези повърхнини имат един равнинен край, в смисъл, че далеч от центъра, гаусовата им кривина K клони към нула, и в тази област те приличат на равнина.



Фиг. 5.1.

- Фигура 5.1 илюстрира случая $n = 1$, който носи името на Ричмънд.

§6. Минимални повърхнини чрез формулата на Бьорлинг

- Определение 6.1. Нека $\alpha,\gamma : (a, b) \to R^3$ са криви, които

(6.1) $||\gamma||=1, \quad \alpha\cdot\gamma=0.$

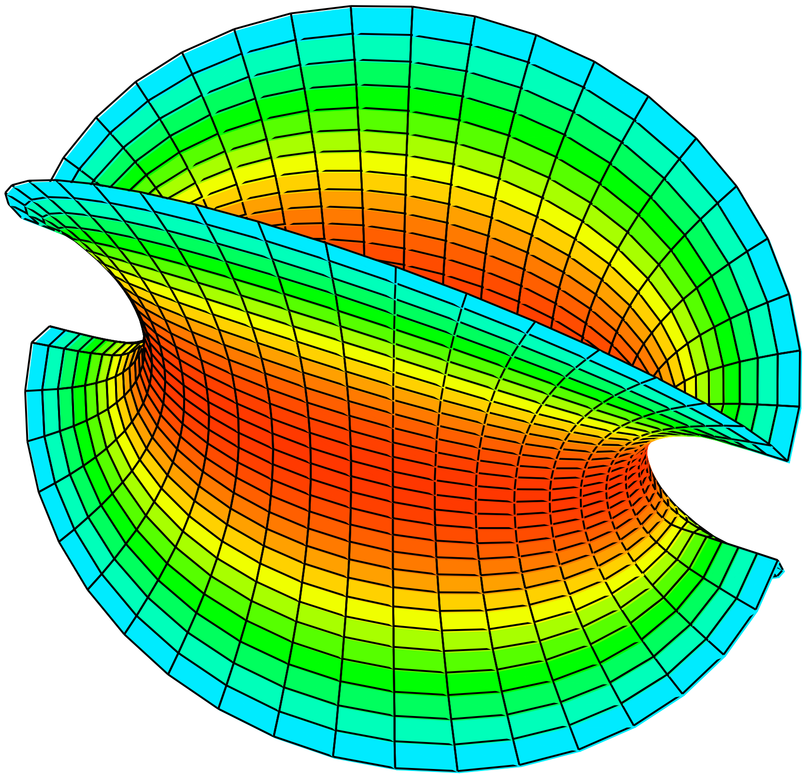
Да предположим, че съществуват холоморфни разширения $\alpha,\gamma: (a, b)x(c, d) \to C^3$ такива, че (6.1) е в сила също за z от (a, b)x(c, d). Фиксираме z_0 от (a, b)x(c, d). Тогава ***кривата на Бьорлинг***, съответстваща на α и γ е дадена чрез

$$\overrightarrow{bj}\left[\vec{\alpha},\vec{\gamma}\right](z)=\vec{\alpha}(z)-i\int_{z_0}^{z}\vec{\gamma}(z)\times\vec{\alpha}'(z)\,dz.$$

Така доказваме, че крива на Бьорлинг всъщност е минимална крива и показваме как тя е свързана с α и γ.

Минимална повърхнина с елипса като геодезична

- Пример за елипсовиден катеноид е



Фиг. 6.1.

§7. Приложение с Mathematica

- Формулите за кривата на Бьорлинг и минимална крива са прости:

```
bjoerling[a_,g_][z_]:=
Module[{w, A},
A= I Integrate[Cross[g[w],a'[w]], w];
 Simplify[a[w] + A/. w->z]
]
bjmincurve[a_][z_]:=
Module[{A},
 A= arclength[a][z];
Append[a[z], I Simplify[PowerExpand[A]]]
]
```

Повърхнината на Енепер

Следната дефиниция обхваща Лема 4.1

```
harmonic2analytic[x_][z_]:= Simplify[2x[z/2, z/(2 I)] - x[0,0]]
```

Като я приложим към минималната повърхност на Енепер, получаваме минимална крива, която вече е дефинирана:

```
mc:= harmonic2analytic[enneper]
mc[z]
ennepermincurve[1][z]
% - %% //Simplify
```

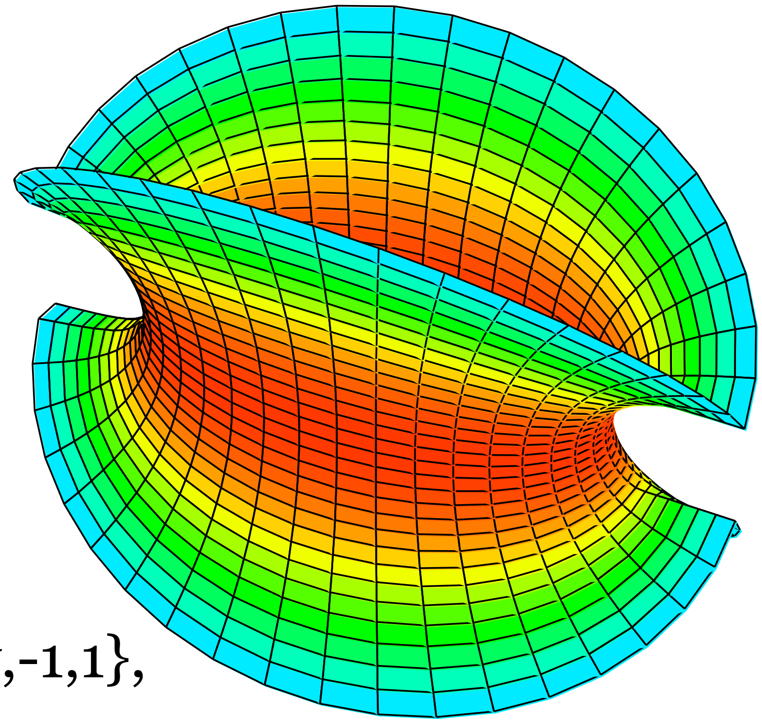
Получаваме повърхността на Еннепер като резултат от изчисленията на последния ред в клетката

```
g[t_]:= analytic2minimal[mc][t]
g[t][u,v]
%//Together//Apart
g[p/2][u,v]
```

Минимална повърхнина с елипса като геодезична

- Програма за изобразяване

```
S @ Module[{x,y,h,xx},
x= ellipsemin[2,1][0];
 y= catenoid[1];
h[t_]:= 1 - (1 - Sech[t]^5)^.3;
 xx[u_,v_]:= Append[x[u,v],
    Hue[h[gcurv[y][u,v]]]];
ParametricPlot3D[xx[u,v], {u,0,2p}, {v,-1,1},
PlotPoints->{40,30}, Lighting->False]
]
```



Резултат: Фиг. 6.1.

Кривина на Гаус

- Кривината на Гаус от една вайерщрасова повърхнина е дадена чрез

```
weiercurv[f_,g_][z_]:=
Module[{w},
A= -16Abs[D[g[w],w]]^2;
B= Abs[f[w]]^2(1 + Abs[g[w]]^2)^4;
A/B /.w->z
```

Постигнати резултати

- Разширено запознаване с темата за минималните повърхнини от класическата диференциална геометрия, както и с комплексните функции
- Разучаване възможностите на система Mathematica за прилагане при изучаването на диференциалната геометрия на повърхнини
- Усвояване на системата за предпечатна подготовка на математически текстове LaTeX

Благодаря Ви за вниманието!