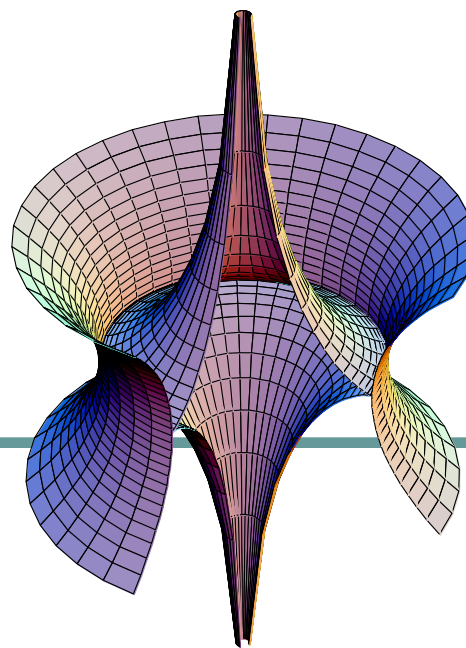


КАНАЛНИ ПОВЪРХНИНИ И ЦИКЛИДИ НА ДЮПЕН

Дипломна работа
на ЛИДИЯ ТАРАТАЕВА
фак.№ 0701051035
спец. Математика

Научен ръководител:
Доц. д-р МАНЧО МАНЕВ



Въведение

- **Фокален интервал** F_q за дадена точка q от правилна повърхнина M е множеството от центровете на кривина на нормалните сечения през нормалата на M в q .
- **Фокални точки на M в q** са крайните точки на F_q .
- **Фокалното множество** $F(M)$ на правилна повърхнина M в R^3 е множеството от точки p от R^3 , които са **фокални точки** за някоя точка q от M .

Въведение

Фокалното множество $F(M)$ има 2 компоненти, по 1 за всяка главна кривина.

- **Случай 1:** Всяка компонента на $F(M)$ е повърхнина.
- **Случай 2:** Една компонента на $F(M)$ е крива, а другата е повърхнина.
- **Случай 3:** Всяка компонента на $F(M)$ е крива.

1. Повърхнини, чиито фокални множества са двумерни

Определение 1.1. Нека $x: U \rightarrow M$ е локална повърхнина на повърхнината $M \subset \mathbf{R}^3$.

Фокалните локални повърхнини, съответни на x , са определени чрез:

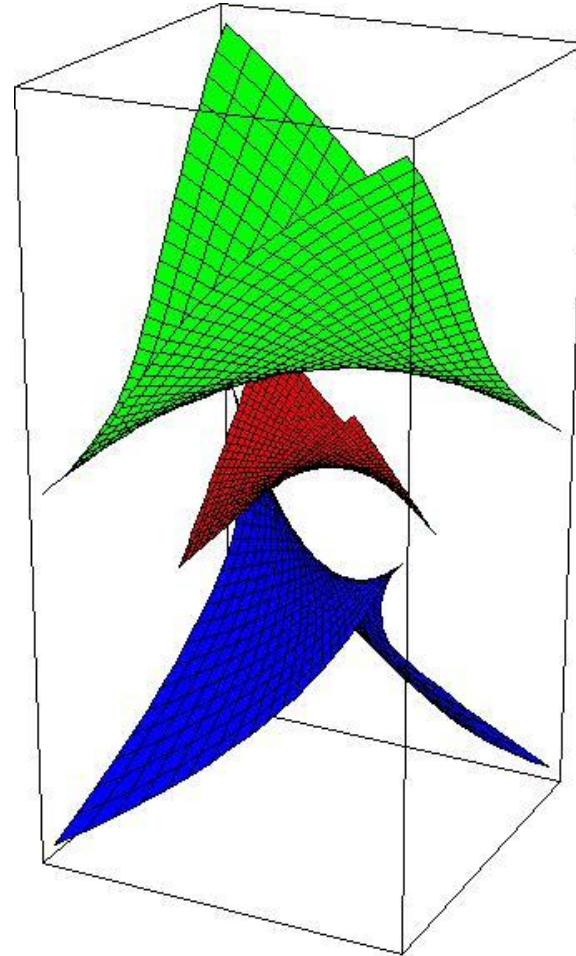
$$(1.1) \quad z_i(u,v) = x(u,v) + \rho_i U(u,v), \quad i=1,2.$$

Образът на всяка фокална локална повърхнина z се съдържа в $F(M)$.

1. Повърхнини, чиито фокални множества са двумерни

Пример:

Фиг.1.1. Хиперболичесен параболоид и неговите фокални множества



2. Канални повърхнини

Определение 2.1.

Линейната обвивка на 1-параметрично семейство $t \rightarrow S^2(t)$ от сфери в \mathbf{R}^3 се нарича **канална повърхнина**.

Кривата, съставена от центровете на сферите се нарича **централна крива**, радиусът на каналната повърхнина е функция r , такава че $r(t)$ е радиусът на сферата $S^2(t)$.

2. Канални повърхнини

Теорема 2.3. Нека $M \subset \mathbf{R}^3$ е правилна повърхнина без омбилични точки. Следните твърдения са еквивалентни:

- (i) M е канална повърхнина;
- (ii) една от системите главни криви на M се състои от окръжности;
- (iii) една от компонентите на фокалното множество на M е крива.

2. Канални повърхнини

2.1. *Тръбестите повърхнини като канални повърхнини*

2.2. *Ротационни повърхнини като канални повърхнини*

2.3. *Канални повърхнини с равнинна централна крива*

3. Циклиди на Дюпен

- В началото на XIX век клас от повърхнини, чиито главни линии са окръжности или прави, били изследвани от Чарлз Дюпен.
- Този клас включва не само конуси, цилиндри и торове, но също и други повърхнини.
- Дюпен нарекъл тези повърхнини **циклиди**.

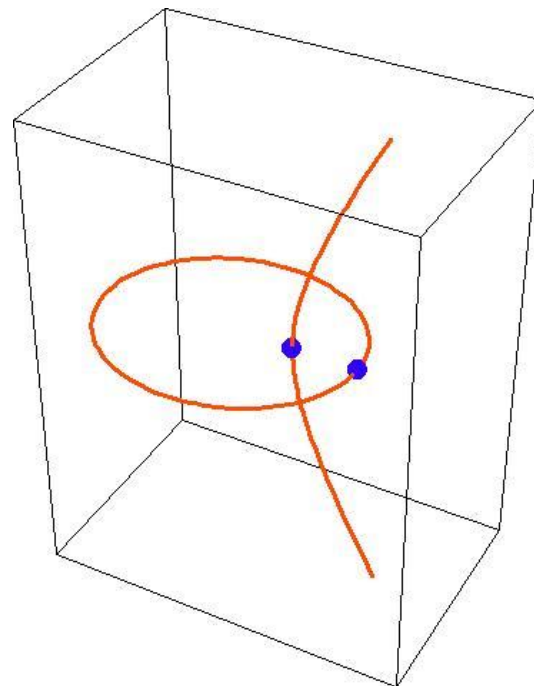
3. Циклиди на Дюпен

Известни са три метода от тяхното изследване:

- i. Метода на **Дюпен** включвал описване на циклида като линейна обвивка от допирателни на сфера към три дадени сфери.
- ii. Според **Лиувил** всяка една от циклидите на Дюпен е образ при инверсия на тор, кръгов цилиндър или конус.
- iii. Според **Максуел** циклидите са линейна обвивка на сфери, центрове им се движат по елипси, хиперболи и параболи, създавайки ротационен тор.

3.1. Елиптични-хиперболични циклиди

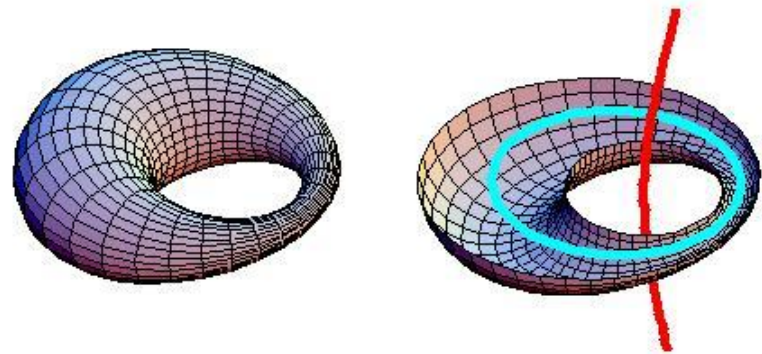
- Нека S_1 и S_2 са сфери.
- S_1 се движи по елипса $\alpha(u)$ и описва повърхнина, която е линейна обвивка на сферите.
- Тази линейна обвивка трябва да съвпада с линейната обвивка, образувана от S_2 , която се движи по клона на хипербола $\beta(v)$.
- Получената повърхнина се нарича **циклида на Дюпен от елиптично-хиперболичен тип.**



3.1. Елиптично-хиперболични циклиди

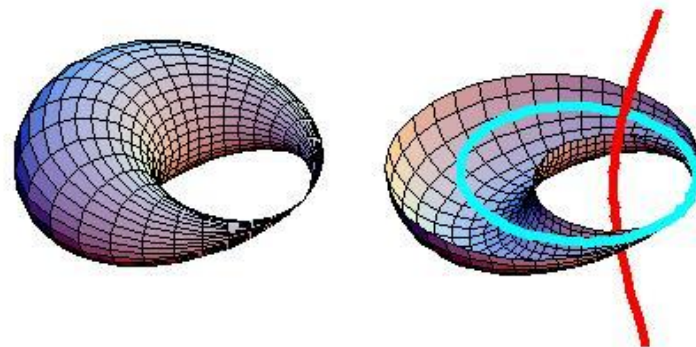
Една елиптично-хиперболична циклида M се нарича:

- (i) *Пръстеновидна циклида*, ако няма нито едно самопресичане;

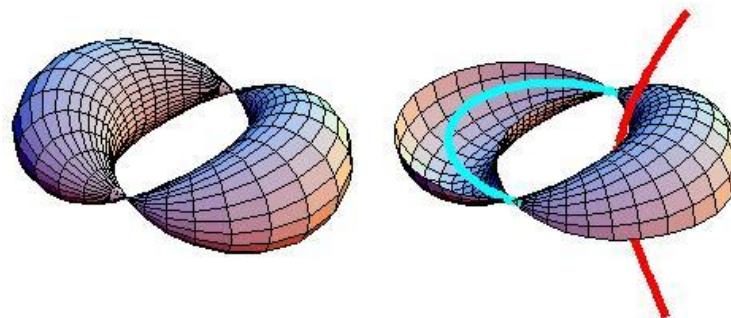


3.1. Елиптични-хиперболични циклиди

(ii) *Вретеневидна циклида*,
ако има една точка
на самопресичане;



(iii) *Роговидна циклида*,
ако има две точки
на самопресичане.



4. Дефиниция на инверсия

Определение 4.1.

Инверсията на R^n спрямо точка $q \in R^n$ с радиус на инверсията ρ е изображение

$\Psi : R^n \setminus \{q\} \rightarrow R^n \setminus \{q\}$, зададено чрез

$$(4.1.) \quad \Psi(p) = q + \rho^2 (p - q) / \|p - q\|^2,$$

където q е центъра на инверсията.

5. Инверсия на повърхнини

Определение 5.1.

Тройна ортогонална система повърхнини върху отворено множество $U \subseteq \mathbf{R}^3$ се състои от три семейства A, B, C от повърхнини, такива че:

- (i) всяка точка на U лежи върху един член на всяко семейство;
- (ii) всяка повърхнина във всяко семейство пресича всеки член на другите две семейства ортогонално.

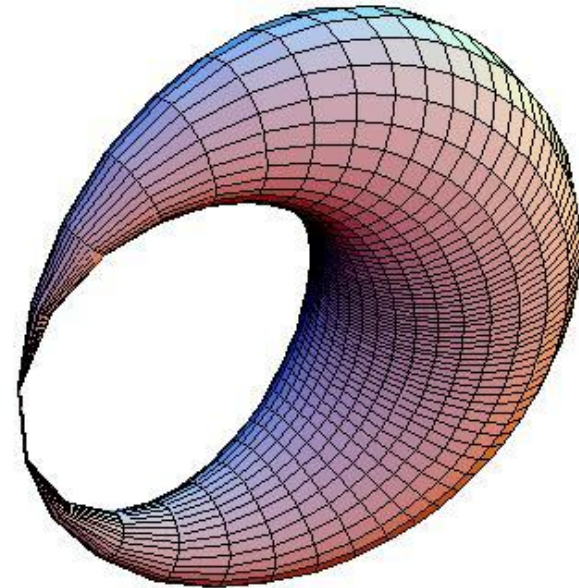
5. Инверсия на повърхнини

Твърдение 5.2.

Инверсията изобразява главни криви върху главни криви.

Твърдение 5.7.

Инверсията изобразява ротационен тор върху циклида на Дюпен.



Фиг. 5.2. Инверсен образ на вретеновиден тор

6. Приложение с Mathematica

Това е основна програма за доказване на формулата за инверсия.

```
inversion[q_List,r_][p_]:=
q + (r^2/((p-q).(p-q)))(p-q)
```

```
inversion[r_][p_]:= (r^2/p.p)p
```

Фиг.3.2. Пръстеновидна циклида

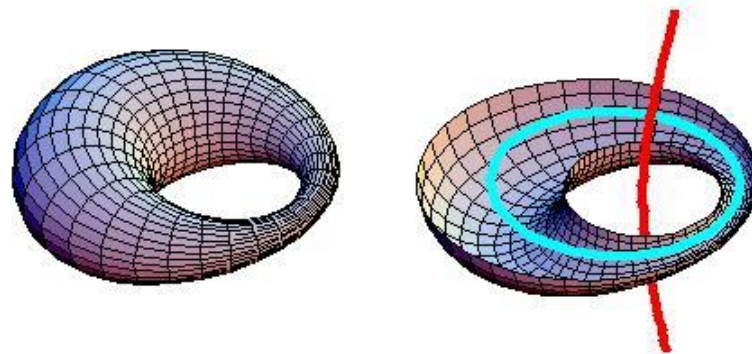
```
сусген[a_,c_,k_,rau_,rav_,opts___]:=Module[{x,z,a,b},  
  x= ellhypcyclide[a,c,k];  
  
  z[1]:= ParametricPlot3D[x[u,v], rau, rav, opts];  
  a[t_]:= {a Cos[t], (a^2-c^2)^(1/2) Sin[t], 0};  
  b[t_]:= {c Sec[t], 0, (a^2-c^2)^(1/2) Tan[t]};  
  aa:= highlight[a, .5, .015];  
  bb:= highlight[b, 0, .015];  
  z[2]= ParametricPlot3D[aa[t], {t,-p,p}];  
  z[3]= ParametricPlot3D[bb[t], {t, -.499p, .499p}];  
  Show[Array[z,3],  
  ( PlotRange->{{-a-c-k,a+c+k},{-a-c-k,a+c+k},{-a-c-k,a+c+k}})]  
]
```

Фиг.3.2. Пръстеновидна циклида

```
Module[{x,z},  
  x= ellhypcyclide[12,3,4.5];  
  z[1]:= ParametricPlot3D[{x[u,v], 9{u,0,.35u}}//Evaluate,  
    {u,0,2p}, {v,0,2p}];  
  z[2]= cycgen[12, 3, 4.5, {u,0,2p}, {v,-p,0}, PlotPoints-  
    >{45,15}];  
  S[GraphicsArray[Array[z,2]], GraphicsSpacing->-.75,  
    ImageSize->500]  
]
```

Фиг. 3.2.

Пръстеновидна циклида
и нейното фокално
множество



Първата основна форма на инверсия образ на тор

Програма за изчисляване:

```
itor:= invertedtorus[{1,2,0},1,4,4,4]
```

```
metric[itor][u,v];
```

```
ee
```

```
ff
```

```
gg
```

Резултат:

$$(64 \cos[v/2]^4)/(-37+8 \cos[u] (1+\cos[v]))$$
$$+16 \cos[v] (-2+\sin[u])+16 \sin[u]^2$$
$$0$$
$$16/(-37+8 \cos[u] (1+\cos[v]))$$
$$+16 \cos[v] (-2+\sin[u])+16 \sin[u]^2$$

Благодаря Ви за вниманието!