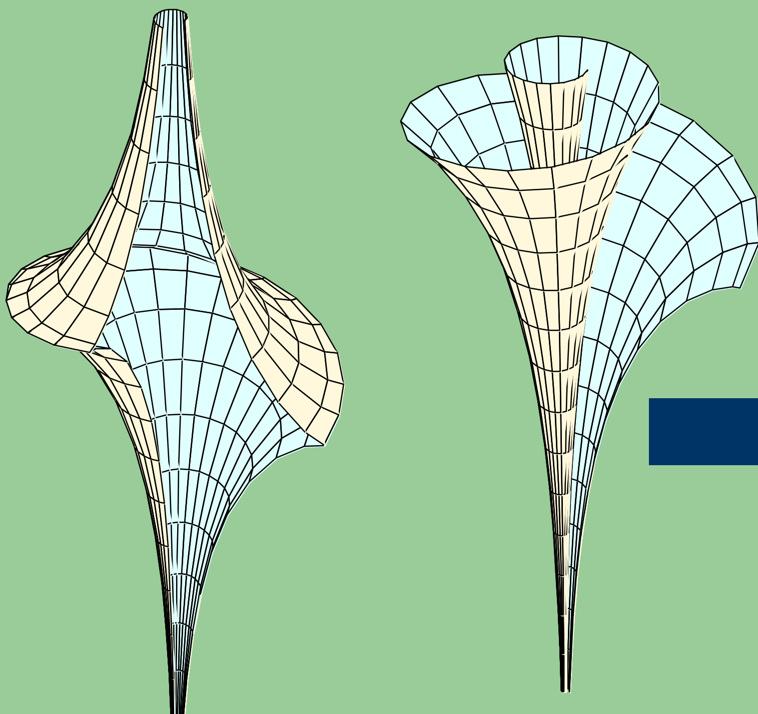
Върху теорията на повърхнините с постоянни отрицателни кривини



Дипломна работа
на Михаела Бобилова
спец. Математика
фак. № 0701051013

Научен ръководител:
доц. д-р Манчо Манев

Увод

- През 1901 г. Давид Хилберт доказва, че не съществува повърхнина (без контур) в R^3 с постоянна отрицателна кривина и със свойството, че тя е затворено подмножество на R^3.
- Първи, които са работили върху теорията на повърхнините с постоянни отрицателни кривини са Бианки и Беклунд.

1. Съществени локални повърхнини на Чебишов

Определение 1.1. Нека *a* е положителна константа. ***Локална повърхнина на Чебишов*** или ***мрежа на Чебишов*** с радиус *a* е локална повърхнина $\mathbf{y}: U \to R^3$ чиято метрика

$$ds^2 = a^2(dp^2 + 2\cos\omega\, dp\, dq + dq^2),$$

където ω е ъглова функция.

2. Локални повърхнини с постоянни отрицателни кривини

Определение 2.1. ***Главна локална повърхнина на Чебишов*** с радиус *a* и ъглова функция θ е локална повърхнина, за която важат твърденията:

1. Метриката на лок.повърхнина е дадена чрез:

$$ds^2 = (\alpha \cos \theta)^2 \, du^2 + (\alpha \sin \theta)^2 \, dv^2 \,;$$

2. Главните кривини удовлетворяват:

$$a^2 k_1^2 = \tan^2 \theta, \qquad a^2 k_2^2 = \cot^2 \theta.$$

3. Синусово уравнение на Гордън

То е вариант на уравн. на Клайн-Гордън $\theta_{uu} - \theta_{vv} = \theta$, където $\theta = \theta(u, v)$ е ъглова функция.

Разглеждаме два варианта:

1. $\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sin\theta \cos\theta$

за намиране на главни повърхнинни параметризации с постоянни отрицателни кривини;

2. $\omega_{pq} = \sin \omega$, $\omega = 2\theta$, $u = p+q$, $v = p-q$

за намиране на асимптотични локални повърхнинн параметризации с постоянни отрицателни кривини

4. Локални повърхнини на Чебишов върху ротационни повърхнини

Теорема 4.1. *Нека M е ротационна повърхнина с* $K \equiv -1/a^2 < 0$ *и нека* θ *бъде ъглова функция, за която са в сила* $\theta_v = 0$, $\theta_u^2 = b^2 - \cos^2\theta$. *Една главна локална повърхнина на Чебишов върху M се задава чрез*

$$(4.1)\quad \mathbf{x}(u,v) = (a/b\,\sin(\theta(u))\cos(bv), a/b\,\sin(\theta(u))\sin(bv), \psi(u))$$

Главна параметризация на Чебишов

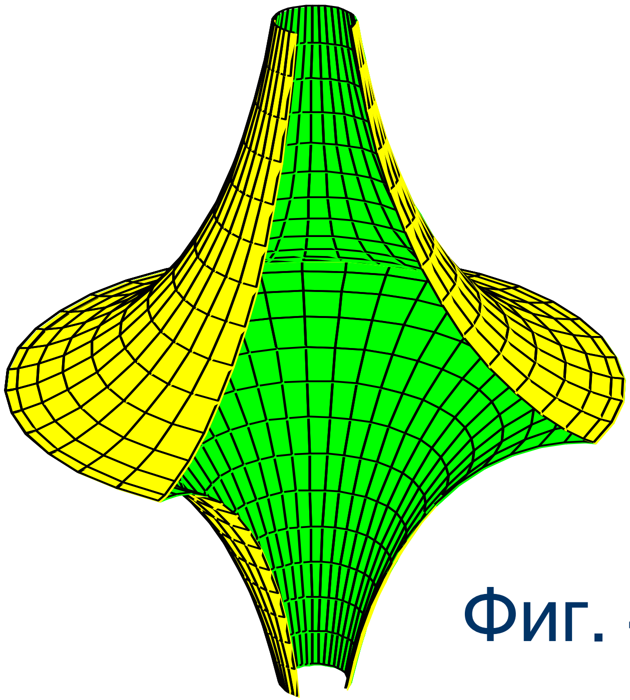
Определение 4.1. ***Главна параметризация на Чебишов*** на псевдосфера с радиус $a>0$ е изображение от R^2 в R^3, зададена чрез

(4.17) $(u, v) \rightarrow$

$a(\cos v / \cosh u,$

$\sin v / \cosh u,$

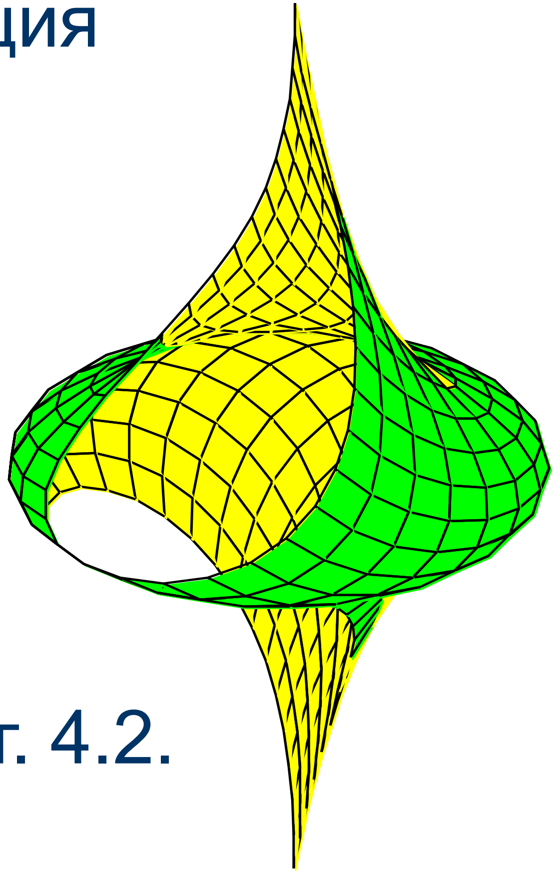
$u - \tanh u).$



Фиг. 4.1.

Асимптотична параметризация на Чебишов

Асимптотичната параметризация на Чебишов се задава по подобен начин.

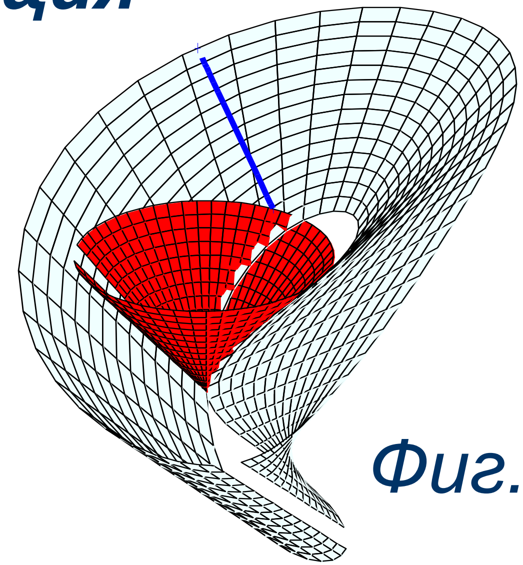


Фиг. 4.2.

5. Трансформация на Бианки

Определение 5.1. Нека *M* е повърхнина в R^3, $K=-1/a^2$, a >0. Казваме, че една повърхнина *N* с единично нормално векторно поле $\boldsymbol{U}_N$ е образ при ***трансформация на Бианки*** на *M*.

Бианки нарича *N* ***допълнителна повърхнина*** на *M*.



Фиг. 5.1.

6. Подвижни репери върху повърхнини в R^3

Репер на Френе {**T**, **N**, **B**} (ортонормиран) за описване геометрията на пространствена крива.

Репер на Дарбу {**T**, **U**, **W**}, където **U** е единичният нормален вектор, а **W = T** x **U**.

Подвижен ортонормиран репер {$\mathbf{E_1}$,$\mathbf{E_2}$,**U**}:

$$\boldsymbol{E_1} = x_u \,.E^{(-1/2)}, \qquad \boldsymbol{E_2} = x_v \,.G^{(-1/2)}$$

7. Повърхнини на Куен като образ на псевдосфера при трансформация на Бианки

Повърхнината на Куен:

$\big((\cos u + u \sin u) \sin v /(1 + u^2 \sin^2 v),$

$(\sin u - u \cos u) \sin v / (1 + u^2 \sin^2 v),$

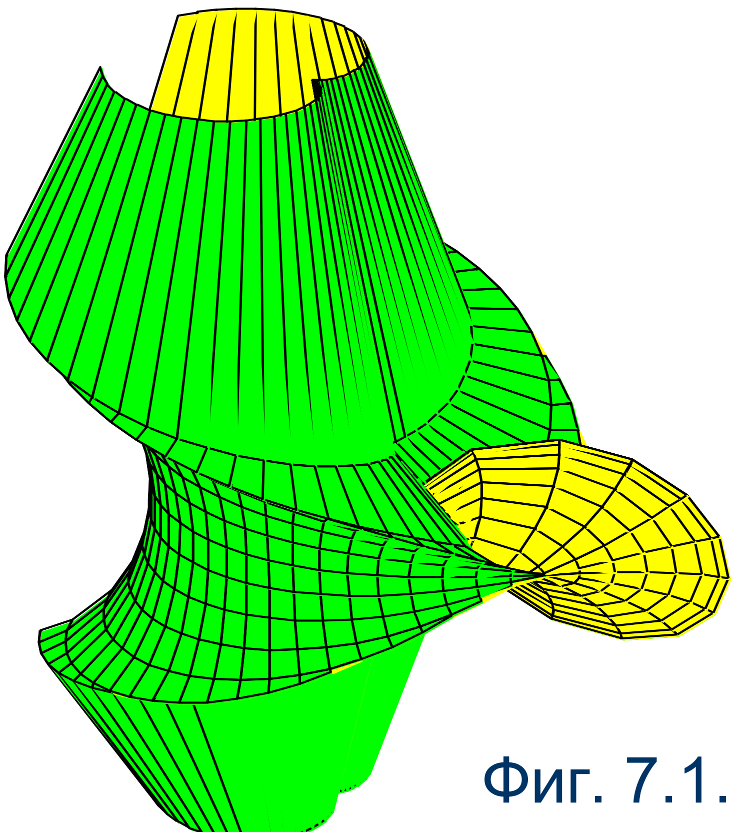
$1/2 \log(\tan v / 2) + \cos v / (1 + u^2 \sin^2 v)\big)$

и гаусова кривина K= -4.

Смесените коефициенти на първата и втората основна форма се анулират, като *u*- и *v*-параметричните криви са главни. Те са кривите показани на фиг. 7.1.

Повърхнина на Куен

- Смесените коефициенти на първата и втората основна форма се анулират.
- Параметричните *u*- и *v*-криви са главни.



Фиг. 7.1.

8. Трансформация на Беклунд

Определение 8.1. Нека M е повърхнина в R^3 с $K=-1/a^2$. Казваме, че една повърхнина N с единично нормално векторно поле $\mathbf{U}_N$ е ***образ на M при трансформация на Беклунд*** с ъгъл на падане (инклинация) σ, ако има изображение Ф: M → N такова че за всяко ***p*** от M са в сила следните зависимости:

(8.1) $\|\Phi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\| = a \cos \sigma$;

(8.2) $(\Phi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}) \parallel \boldsymbol{q}$, където ***q*** е допир. вектор към M в ***p***;

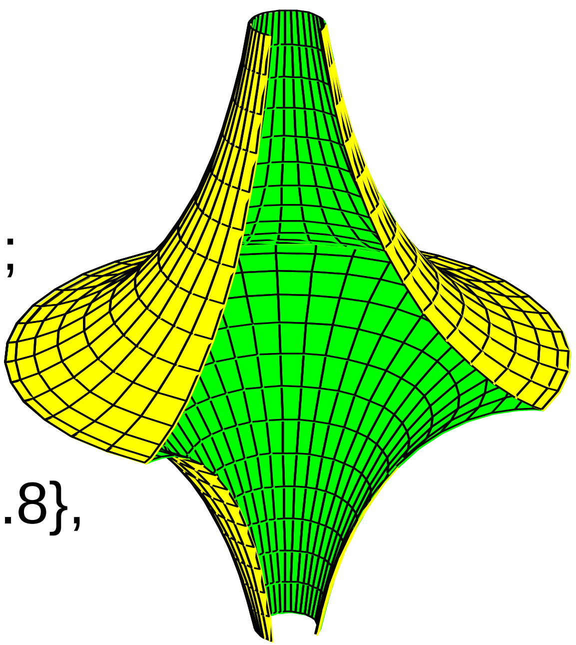
(8.3) $\boldsymbol{U}_N(\Phi(\boldsymbol{p})) \perp (\Phi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p})$;

(8.4) $\measuredangle\, (\boldsymbol{U}_M(\boldsymbol{p}); \boldsymbol{U}_N(\Phi(\boldsymbol{p}))) = \pi/2 - \sigma.$

9. Приложение с Matematica

Главната локална повърхнина на Чебишов за изобразяване на главните криви върху псевдосфера:

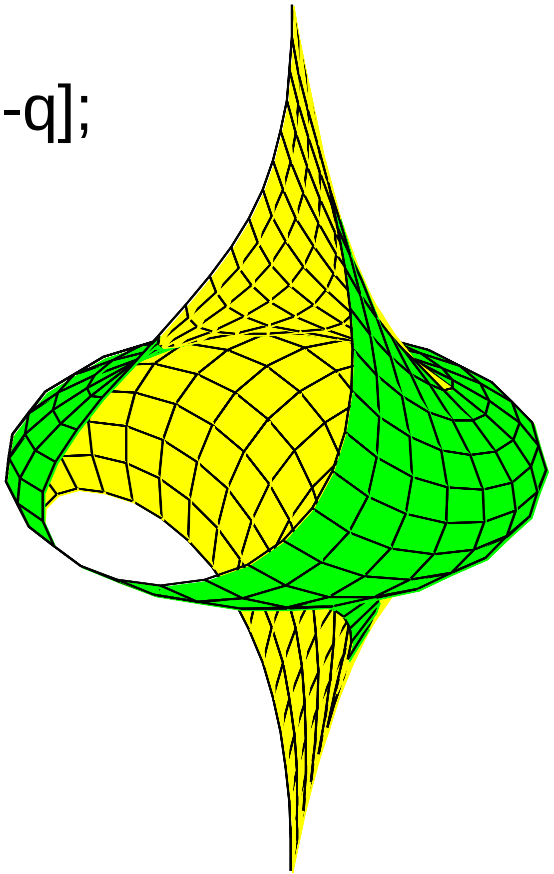
```
pseudospheretcheb[a_][u_,v_]:=
a{Cos[v]/Cosh[u], Sin[v]/Cosh[u],
 u - Tanh[u]}
Module[{x,xx}, x= pseudospheretcheb[1];
xx[u_,v_]= Append[x[u,v],
 FaceForm[Green,Yellow]];
S @ ParametricPlot3D[xx[u,v], {u,-2.8, 2.8},
 {v,0,3π/2},
PlotPoints->{30,30}, PlotRange->All] ]
```



Graphics3D Фигура 4.1

Главната локална повърхнина на Чебишов за изобразяване на асимптотичните криви върху псевдосфера

```
Module[{x,xx},
 x[p_,q_]= pseudospheretcheb[1][p+q, p-q];
 xx[p_,q_]= Append[x[p,q],
    FaceForm[Green,Yellow]];
 S @ ParametricPlot3D[xx[p,q],
    {p,-p/2,p/2},{q,-p/2,p/2},
 PlotPoints->{20,20}, PlotRange->All,
    ViewPoint->{-4,-4,4}]
]
```



Graphics3D Фигура 4.2

Първа основна форма на повърхнината на Куен

- Програма за изчисление

```
metric[kuentcheb[a,b]][u,v];
ee//Simplify
ff//Simplify
```

- Резултат

((1-2 v^2+Cosh[2 u])2 (-16 a2+19 b2-16 a2 v2
+24 b2 v2
+8 b2 v4+4 (4 a2 (1+v2)-b2 (3+2 v2)) Cosh[2 u]
+b2 Cosh[4 u]))/(2 (1+2 v^2+Cosh[2 u])4)
-((a2-b2) v (-5+8 v2+8 v4-4 (1+2 v2)
Cosh[2 u]+Cosh[4 u]) Sinh[2 u])/(4 (v^2+Cosh[u]^2)4)

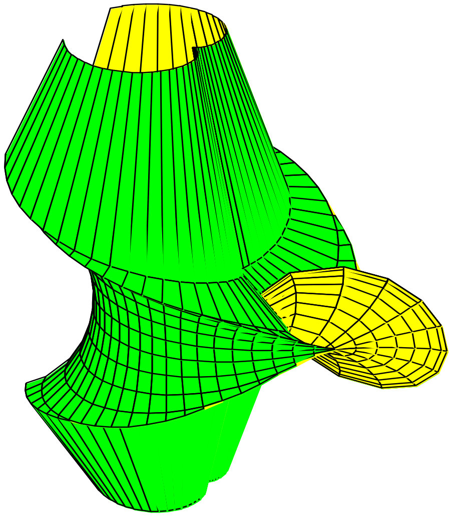
Повърхнина на Куен

- Програма за изобразяване:

```
S @ Module[{x,xx,z},
x= kuentcheb[1,1];
xx[u_,v_]= Append[x[u,v], FaceForm[Coral, Snow]];
e= .001;
z[1]= ParametricPlot3D[xx[u,v], {u,-4+e,4+e}, {v,-4+e,4+e},
PlotPoints->{32,32}];
z[2]=ParametricPlot3D[xx[p+q,p-q],
 {p,-2.5,2.5}, {q,-2.5,2.5},
PlotPoints->{32,32}];
GraphicsArray[Array[z,2], GraphicsSpacing->-.2]
 ];
```

- Резултат

  Graphics3D Фигура7.1



Благодаря Ви за вниманието