Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Анотация

на дипломна работа на тема

Параметрична и Липшицова устойчивост на диференциални уравнения с "максимуми"

Дипломант: Стела Глухчева
спец. Бизнес информатика с Английски език
Научен ръководител: проф. д.м.н Снежана Христова

Ключови думи

Диференциални уравнения с "максимуми" , параметрична, равномерно параметрична, Липщицова, равномерно Липшицова, равномерно евентуална Липшицова устойчивост, обикновено скаларно уравнение на сравнението, метод на Разумихин, функция на Ляпунов, две различни мерки.

Обща характеристика на дипломната работа

Настоящата дипломна работа изучава параметрична и Липщицова устойчивост на нулевото решение на диференциални уравнения с "максимуми"върху закъсняващ интервал с постоянна дължина. Това е един специален вид функционални уравнения, в които участва максимумът на изследваната функция в минал период. Тъй като функцията максимум има много специфични свойства, то уравненията с максимуми са строго нелинейни. В резултат на това диференциалните уравнения с "максимуми"заемат важно място в качествената теория на функционалния анализ.

Актуалност на темата

Темата на дипломната работа е актуална, доколкото диференциалните уравнения с "максимуми"са от една страна мощен апарат за адекватно моделиране на редица реални процеси, особено в инжинерството, а от друга са сравнително нов и недостатъчно изучен клон на диференциалните уравнения. В същото време теорията на устойчивостта и получаването на достатъчни условия за различни видове устойчивости е един от най-приложимите и най-интересните от практическа гледна точка свойства на решенията.

Обект и предмет

В дипломната работа се разглежда един от основните проблеми в качествената теория на диференциалните уравнения с "максимуми" , а именно устойчивостта на решението. Изучени са няколко специални вида устойчивости. Единият от тях е свързан с параметри. Обосновавайки се на факта, че в областта на теорията на автоматичното управление на различни технически системи, често законът за регулиране зависи от максималните стойности на някои параметри в определен интервал от време, е изучена параметрична и равномерно параметрична устойчивост на диференциалните уравнения с "максимуми". Другият вид устоичивост, изследвана в работата е Липшицовата. Тази устойчивост се намира някъде между равномерната устойчивост, от една страна, и понятията за асимптотическа устойчивост във вариации и равномерно асимтотическа устойчивост във вариации, от друга. За изследването на посочените видове устойчивости се въвеждат функции на Ляпунов и се използва метода на Разумихин.

Цел и задачи

Дипломната работа изследва поведението на нулевото решение на диференциалните уравнения с "максимуми"с цел достигане на достатъчни условия за параметрична и Липшицова устойчивост на тези решения по отношение на две различни мерки- за началното условие и са самото решение.

Научна новост

Получените в дипломната работа достатъчни условия за параметрична, равномерно параметрична, Липшицова, равномерно Липшицова и равномерно евентуална Липшицова устойчивост на нулевото решение на диференциалните уравнения с "максимуми"са нови, актуални и приложими.

Теоретична значимост

В дипломна работа се доизгражда теорията за устойчивост на диференциалните уравнения с "максимуми" , като са получени достатъчни условия за:
- параметрична екви-устойчивост;
- равномерно параметрична устойчивост;
- Липшицова устойчивост;
- равномерно Липшицова устойчивост;
- равномерно евентуална Липшицова устойчивост;

С оглед максимално обобщение на разглеждания проблем се използват две различни мерки за началното условие и за самото решение.
Приложимостта на получените достатъчни условия е илюстрирана с примери.
Резултатите в дипломната работа са оформени като публикациии и са докладвани на конфереции.

Приложимост и полезност

Това е област, която намира широко приложение не само в математиката, но и в медицината, биологията, икономиката. Резултатите, получени в работата, имат предимно качествен характер. Доказателствата в работата са прецизни и математически коректни. Приложимостта на повечето получени достатъчни условия е илюстрирана с конкретни примери. Доказаните в дипломната работа резултати допълват качествената теория на диференциалните уравнения. Приведени са примери, с които са илюстрирани достигнатите резултати. В един от тези примери можем да забележим, че изборът на двете различни мерки може да стане по такъв начин, че да дадем максимално значение на началните условия, или да заобиколим някои ограничения за дадените начални условия.

Теза и постановки за защита

За изучаването на поставения въпрос за устойчивостта се разглеждат два вида нелинейни системи от диференциални уравнения с "максимуми":

$$x'(t) = f(x(t), \max_{s\in[t-r,t]} x(s), p), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

с начално условие

$$x(t) = \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0], \tag{2}$$

за разглеждане на параметрична устойчивост

и

$$x' = f(t, x(t), \max_{s\in[t-r,t]} x(s)) \quad \text{for} \quad t \geq t_0 \tag{3}$$

с начално условие

$$x(t) = \varphi(t - t_0) \quad \text{за} \quad t \in [t_0 - r, t_0], \tag{4}$$

за разглеждане на Липшицовата устойчивсот, където $x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^m$ е параметър , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$ е дадено число и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ е произволно дадено число.

За получаване на достаъчни условия за устойчивост на нулевото решение на тези системи се използва клас Липшицови функции и обикновено скаларно диференциално уравнение на сравнението:

$$u' = g_1(t, u),$$

където $u \in \mathbb{R}, \quad g_1 \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(t, 0) \equiv 0,\ t_0 \in \mathbb{R}_+,\ u_0 \in \mathbb{R}.$

Подходът за изучаване на посочените в дипломната работа устойчивости е подобен за всяка една от тях. Дефинират се някои множества, въвеждат се две мерки- за началното условие и за самото решение, дават се определения за разглежданите устойчивостти.

Ще казваме, че нелинейната система от диференциални уравнения с "максимуми"(1), (2) е:

A) *параметрично екви-устойчива* в $p^* \in \mathbb{R}^m$ по отношение на двете различни мерки h_0, h ако съществуват устойчиво равновесно състояние ξ^* и околност $N(p^*)$, такива че за всяко $p \in N(p^*)$:
(i) Съществува равновесно състояние ξ_p, т.е $f(\xi_p, \xi_p, p) = 0$;
(ii) За всяка начална точка $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(t_0, \epsilon, p) > 0$, такава че за всяка начална функция $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ от неравенството $H_0(t_0, \varphi - \xi_p) < \delta$ следва верността на неравенството $h(t, x(t; t_0, \varphi, p) - \xi_p) < \epsilon$ при $t \geq t_0$, където $x(t; t_0, \varphi, p)$ е решение на началната задача от диференциални уравнения с "максимуми"(1), (2).

B) *равномерно параметрично устойчива* в $p^* \in \mathbb{R}^m$ по отношение на двете различни мерки h_0, h, ако δ в (A) не зависи от $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Дават се определенията за Липшицова устойчивост.

Ще казваме, че нелинейната система от диференциални уравнения с "максимуми"(3), (4) е:

C) *равномерно евентуално устойчива по отношение на двете различни мерки* h_0, h, ако за всяко $\epsilon > 0$ съществуват $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ и $\tau(\epsilon) > 0$, такива че за всяка начална точка $t_0 \geq \tau(\epsilon)$ и за всяка начална функция $\varphi \in C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ от неравенството $H_0(t_0, \varphi) \leq \delta$ следва верността на твърдението

$$h(t, x(t; t_0, \varphi)) < \epsilon, \qquad t \geq t_0;$$

D) *Липшицово устойчива по отношение на двете различни мерки* h_0, h, ако за всяка начална точка $t_0 \in \mathbb{R}_+$ съществува $M > 0$ и $\delta = \delta(t_0) > 0$, такива че за всяка начална функция $\varphi \in C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ от неравенството $H_0(t_0, \varphi) \leq \delta$ следва верността на твърдението

$$h(t, x(t; t_0, \varphi)) < MH_0(t_0, \varphi), \qquad t \geq t_0;$$

E) *равномерно Липшицово устойчива по отношение на двете различни мерки* h_0, h, ако съществуват константите $M > 0$ и $\delta > 0$, за които за всяка начална точка $t_0 \in R_+$ и за всяка начална функция $\varphi \in C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ от неравенството $H_0(t_0, \varphi) \leq \delta$ следва верността на твърдението

$$h(t, x(t; t_0, \varphi)) < MH_0(t_0, \varphi), \qquad t \geq t_0;$$

F) *Равномерно евентуално Липшицово устойчиво по отношение на двете различни мерки* h_0, h, ако за $\epsilon > 0$ съществуват $M > 0$, $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ и $\tau(\epsilon) > 0$, за които за всяка начална точка $t_0 \geq \tau(\epsilon)$ и за всяка начална функция $\varphi \in C([t_0 - r, t_0], \mathbb{R}^n)$ от неравенството $H_0(t_0, \varphi) \leq \delta$ следва верността на твърдението

$$h(t, x(t; t_0, \varphi)) < MH_0(t_0, \varphi), \qquad t \geq t_0;$$

Прилагат се примери за обикновени диференциални уравнения, с които се илюстрира разликата между устойчивост на равновестното състояние и параметрична устойчивост. Доказани са помощни твърдения, в които се задава връзка между разглежданата функция на Ляпунов, нулевото и максималното решение на обикновеното скаларно уравнение на сравнението.

При параметричната устойчивост полученият резултат е от

$$\max_{s \in [-r, 0]} V(t_0 + s, \varphi(s) - \xi_p) \leq u_0$$

следва верността на твърдението

$$V(t, x(t; t_0, \varphi, p^*) - \xi_p) \leq u^*(t; t_0, u_0) \;\text{ за }\; t \in [t_0, T], T > 0,$$

където с $u^*(t; t_0, u_0)$ записваме максималното решение на обикновеното скаларно уравнение на сравнението.

При Липшицовата устойчивост полученият резултат е от

$$\max_{s \in [t_0 - r, t_0]} V(s, \varphi(s)) \leq u_0$$

следва верността на твърдението

$$V(t, x(t)) \leq u^*(t), \quad t \in [t_0, T], T > 0,$$

където отново с $u^*(t; t_0, u_0)$ записваме максималното решение на обикновеното скаларно уравнение на сравнението.

Тези резултати се използват за получаването на достатъчните условия за устойчивост, представени във няколко теореми. Интересно и важно условие в някои от тези теореми е ограничеността на разглежданата функция на Ляпунов, както от ляво- по отношение на една мярка, така и от дясно- по отношение на друга мярка:

За параметрична устойчивост тази ограниченост записваме по следния начин

$$a(h(t, x - \xi_p)) \leq V(t, x - \xi_p) \leq b(h_0(t, x - \xi_p)),$$

докато при Липшицовата устойчивост ограничеността от двете страни изглежда така:

$$C_1 h(t, x) \leq V(t, x) \leq C_2 h_0(t, x).$$

Важно условие също така е съпоставката между разглежданата нелинейна система от диференциални уравнения с "максимуми"и обикновеното скаларно уравнение на сравнението, както и свеждането на нулевото решението на тази строго нелинейна система до нулевото решението на обикновеното скаларно уравнение на сравнението.

Когато функцията на Ляпунов не удовлетворява всички необходими условия за устойчивост, тогава се използва втора фунцкия на Ляпунов. В този случай се въвежда и второ обикновено диференциално уравнение на сравнението

$$v' = g_2(t, v), \quad t \geq t_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad v \in \mathbb{R}, g_2(t, 0) \equiv 0.$$

Тук отново имаме условието за ограниченост на втората функция на Ляпунов, както от ляво, така и от дясно, по отношение на две различни мерки. В случая на параметрична устойчивост имаме изпълнени следните неравенства:

$$a(h(t, x - \xi_p)) \leq V_2^{(\mu)}(t, x - \xi_p) \leq b(h_0(t, x - \xi_p)),$$

Тук ще отбележим, че тези неравенства са изпълнени в кълбо S с радиус $\rho > 0$. Съответно нулевото решение на разглежданите нелинейни системи от диференциални уравнения с "максимуми"са сведени до нулевите решения на двете обикновено скаларни уравнения на сравнението.

Теоремите са доказани с допускане на обратното твърдение, а именно че неравенството, гарантиращо устойчивост в дадените определения $A), B), C), D), E, F)$ не е изпълнено в целия интервал, посечен в определенията, т.е. допускането се състои в съществуването на точка, в която неравенство става равенство и надясно от тази точка неравенството сменя посоката на знака си. С достигането до противоречие теоремите са доказани, с което и достатъчните условия за устойчивост на нулевото решение на строго нелинейната система от диференциални уравнения с "максимуми"по отношение на две различни мерки. Получените достатъчни условия са илюстрирани с примери.

Обем и структура на дипломната работа

В настоящата дипломна работа обект на изследване са диференциални уравнения с "максимуми" на неизвестната функция върху закъсняващ интервал с постоянна дължина. Работата се състои от увод, 2 глави с общо 8 параграфа, заключение и цитирана литература.

Глава 1 е изучена в ([16]). В нея се дават определения за параметрична екви-устойчивост и равномерно параметрична устойчивост на диференциални уравнения с "максимуми" , както и други определения, използвани за получаване на основните резултати. Доказват се теореми, даващи достатъчни условия за параметрична екви-устойчивост и равномерно параметрична устойчивост на нелинейни диференциални уравнения с "максимуми" , както за обикновена норма, така и за две различни мерки- една за началното условие и една за самото решение. За целта се въвеждат функции на Ляпунов. Използва се метода на Разумихин. Получените резултати са илюстрирани с пример.

Глава 2 е изучена в ([17]). В нея се дават определения за Липшицова и равномерно Липшицова устойчивост, както и други определения, използвани за получаване на основните резултати. Доказват се теореми, даващи достатъчни условия за Липшицова и равномерно Липшицова устойчивост на нелинейни диференциални уравнения с "максимуми" , както за обикновена норма, така и за две различни мерки- една за началното условие и една за самото решение. За целта се въвежда функция на Ляпунов. Използва се метода на Разумихин. Получените резултати са илюстрирани с пример.

Апробация

Част от получените резултати в дипломната работа са докладвани на следните международни и национални конференции:

- 36 международна конференция "Проложение на математиката в техниката и икономиката"на Техническия университет, Созопол , Юни 5-10, 2010.

- Конференция с международно участие "MATTEX 2010 "на Шуменския университет "Епископ Константин Преславски Шумен, 19-21 Ноември, 2010.

Една част от резултатаите в дипломната работа са публикувани под формата на научни статии:

- S. Hristova, S. Gluhcheva, Lipshitz stability in terms of two measures for differential equations with "maxima Int. J. Pure Appl. Math.- IEJPAM, vol.2, No. 2, 2010.

- S. Hristova, S. Gluhcheva, Parametric stability in terms of two measures for differential equations with "maxima Appl. of Math. In Eng. Econ., Proc. Of 36th International Conference, Vol. 1293, 2010, 117-122.

- S. Gluhcheva, Lipshitz stability for differential equations with "maxima MATTEX 2010, University of Shumen "Episkop Konstantin Preslavski November, 2010, accepted.

Библиография

[1] Lakshmikantham V., Liu X., *Stability analysis in terms of two measures*, World Scientific, Singapore, 1993.

[2] Hale J., and Lunel S.M.V., Introduction to Functional Differential Equations, Springer- Verlag, New York, 1993.

[3] A. R. Magomedov, On some problems for differential equations with "maximums" , Izv. Akad. Nauk Azerbeidjanskoi SSR, Ser. phys. techn. and math, sciences, no. 1, 1977, 104-108 (in Russian).

[4] Bainov D. D., Petrov V. A. and Proytcheva V. S., Existence and asymptotic behaviour of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with "maxima" , J. Comput. Appl. Math., 83, no. 2, (1997), 237Ц 249.

[5] Dannan F. M. and Elaydi S., Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **113**, no. 2,(1986) 562–577.

[6] Voulov H. D. and Bainov D. D., On the asymptotic stability of differential equations with "maxima" , Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 40, no. 3, (1991) 385Ц420.

[7] Bainov D. D. and Hristova S. G. ,Monotone-iterative techniques of Lakshmikantham for a boundary value problem for systems of differential equations with maxima, J. Math. Anal. Appl., 190, no. 2, (1995), 391Ц401.

[8] Plotnokov V.A., Kichmarenko O.D., A note on the averaging for differential equations with maxima, Iranian J. Optimization, (2010) (to appear).

[9] Plotnikov V.A. and Kichmarenko O.D., Averaging of differential equations with maximum, Naukovy Visnyk Chernivetskogo Universitetu: Zbirnyk Naukovyh Prats, Matematyka, 150 (2002) 78Ц82 (in Ukrainian).

[10] Sundarapandian V., New results on the parametric stability of nonlinear systems, *Math. Comput. Modelling*, **43**, (2006) 9-15.

[11] Yoshida N., Forced oscillations of solutions of parabolic equations, Bull. Austral. Math. Soc., 36 (1987), 289Ц294.

[12] Hristova S., Periodic solutions of second-order integro-differential equations with maxima, Plovdiv. Univ. Nauchn. Trud., 20, no. 1, (1982) 135Џ 148 (1983) (in Bulgarian).

[13] Hristova S. G. and Roberts L. F., Boundedness of the solutions of differential equations with "maxima" , Int. J. Appl. Math., 4, no. 2, (2000) 231Џ240.

[14] M. Ikeda, Y. Ohta, and D. D. Siljak, Parametric stability, in *New Trends in Systems Theory*, G. Conte, A. M. Perdon, and B. Wyman, Eds., Boston, MA: Birkhauser, 1990, pp. 1-20.

[15] Popov E. P., Automatic regulation and control, Moscow, 1966 (in Russian).

[16] S. Hristova, S. Gluhcheva, Parametric stability in terms of two measures for differential equations with "maxima" Appl. of Math. In Eng. Econ., 36th International Conference., Vol. 1293, pp. 117-122 (2010).

[17] S. Hristova, S. Gluhcheva, Lipshitz stability in terms of two measures for differential equations with "maxima" , Int. J. Pure Appl. Math.- IEJPAM, vol.2, No. 2(2010).

[18] S. Gluhcheva, Lipshitz stability for differential equations with "maxima" , MATHTECH 2010.

[19] Kulev G. K. and Bainov D.D., Lipschitz quasistability of impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **172**, no. 1, (1993) 24–32.

[20] Kulev G. K. and Bainov D.D., Lipschitz stability of impulsive systems of differential equations, *Int. J. Theor. Phys.*, **30** (1991) 737–756.